DANS LA MÊME COLLECTION :

II. *Ensembles, nombres et puissances*
III. *Exploration de l'espace et pratique de la mesure*

A PARAÎTRE :

Les Fractions (avec fiches de travail)
La Géométrie des transformations (avec fiches de travail)
Algèbre linéaire (avec fiches de travail)

Les premiers pas en mathématique

I

LOGIQUE ET JEUX LOGIQUES

par
Z. P. DIENES et E. W. GOLDING

O. C. D. L.
65, RUE CLAUDE-BERNARD – PARIS 5e

Le texte original de cette initiation à la mathématique a té publié sous le titre *First years in mathematics : Logic and logical games*, par l'O. C. D. L. pour ESA Harlow (Essex), Grande-Bretagne, et Herder and Herder, New York.
Traduit de l'anglais par Pierre Roy.

INTRODUCTION

REMARQUES PRÉLIMINAIRES SUR LA MATHÉMATIQUE ET LES ENFANTS

Cette collection est destinée aux maîtres du premier degré, et c'est sans la moindre hésitation que nous leur disons : il faut que le « calcul » d'antan cède le pas à l'étude de la « mathématique » dès le tout jeune âge. A notre époque moderne, il est nécessaire d'élever les enfants dans la compréhension de la mathématique et de ses utilisations. Cela devient une part essentielle de notre culture [1].

Cette évolution significative aura, c'est inévitable, de nombreux effets, et il ne nous est pas permis, à nous autres enseignants, de continuer à négliger les problèmes qu'elle pose dans le domaine pédagogique. Il ne suffisait pas, nous le savons maintenant, de réformer les programmes du second degré, quand on a bien voulu le faire, pour préparer de manière satisfaisante nos enfants au travail qui leur sera demandé à l'Université. Il ne suffirait pas non plus de réformer les programmes du premier degré, afin de préparer les enfants au travail plus sérieux qui les attend au lycée. On commence à admettre aujourd'hui que c'est au moment même où l'enfant aborde pour la première fois l'école, au moment où il entre à la maternelle, qu'il faut s'occuper de ses mathématiques.

Qu'on n'aille surtout pas déduire de ces affirmations que nous préconisons « la mathématique moderne » pour les seuls enfants destinés, en définitive, à l'enseignement supérieur. Le besoin sera tout aussi grand pour les autres, qui n'iront pas si loin. Il devient dès à présent évident que le monde de demain exigera de tous une certaine « culture mathématique », même de ceux qui n'auront pas dépassé le niveau du brevet.

Notre collection rend compte de quelques-unes des expériences qu'il conviendrait d'offrir aux enfants dès leur arrivée à la maternelle et pendant leurs deux premières années d'école. Soulignons toutefois qu'il n'existe pas de règles absolues sur ce que l'enfant peut, ou ne peut pas apprendre, pendant ces deux premières années.

Les suggestions de cette collection sont le résultat d'un certain nombre d'années d'études dans différentes parties du monde, notamment à Adélaïde (Australie), Papoua (Nouvelle-Guinée), dans le

1. Cf. Z. P. Dienes, *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire.*

Leicestershire (Angleterre) et au Massachussetts (États-Unis). Bien qu'elles aient toutes été essayées d'une manière relativement étendue, il est dès à présent évident qu'elles devront être révisées à la lumière des recherches ultérieures. Il est possible que certains exercices semblent trop difficiles pour des enfants moyens, et qu'en même temps il faille en introduire d'autres pour rendre plus complet le cours du développement conceptuel.

PLAN

Cette collection comprend trois fascicules. Le premier concerne l'acquisition de la logique par les jeunes enfants. Le second vise l'introduction du nombre, en partant des propriétés des ensembles, et conduit à la notion de puissance. Le troisième traite brièvement des applications pratiques des nombres aux situations impliquant des mesures de longueur, de poids, de capacité, de temps, d'aire, et ainsi de suite et comporte également une initiation à la géométrie.

A notre avis, l'acquisition de la logique doit se développer parallèlement à celle des autres aspects ; certes, on ne pourra guère faire des mesures avant que ne se soient formées certaines idées sur les nombres, c'est bien naturel ; mais aussitôt que cette formation sera intervenue, on pourra agencer des quantités de situations pratiques dans lesquelles les enfants seront encouragés à utiliser les notions nouvellement formées sur les nombres.

On trouvera dans la 2e partie un grand nombre d'exercices pratiques que nous appelons des « jeux ». Ils ne sont pas destinés à être lus et suivis par les enfants : ceux-ci ne disposent souvent ni du vocabulaire, ni même parfois de la capacité de lire qui leur permettraient de déchiffrer, d'interpréter et de mener à bien les instructions qui y sont contenues. Par contre, ces jeux pourraient être utilisés par des enfants plus âgés. En effet, nous pensons que si des enfants ne sont pas passés dès le début par les expériences ici décrites, on devrait cependant à un moment donné leur fournir l'occasion de faire ces expériences. Les jeux pourraient être utilisés aussi par les futurs maîtres pour bâtir des plans de leçons. En présentant nos instructions sur les ensembles et les mesures, nous leur avons donné une forme qui facilitera l'établissement de plans de leçons, ou de parties de leçons, mais il est bien entendu que ce sont les maîtres eux-mêmes qui doivent établir ces plans.

LA SITUATION EN CLASSE

Des changements aussi radicaux dans les programmes scolaires ne seraient pas possibles s'il nous fallait conserver en même temps les manières de faire et l'atmosphère de la classe traditionnelle. En fait, nous espérons que les maîtres s'efforceront de passer d'une « situation

d'enseignement » à une « situation d'apprentissage »[1]. Insistons bien sur ce point : si l'on aborde le problème comme nous le suggérons ici, il y aura bien moins d'« enseignement frontal s'adressant à toute la classe ». Une bonne partie du travail sera exécutée par des enfants travaillant en petits groupes, voire individuellement. Ces groupes peuvent être constitués par le maître, et s'ils ne le sont pas, on s'apercevra que les enfants sont très prompts à se grouper d'eux-mêmes, et à travailler ensemble dans la joie, surtout si on ne leur a pas gâché leur travail par l'institution d'un système de récompenses et de punitions. Les enfants éprouvent fondamentalement de l'intérêt à la découverte des nouveautés du monde qui les entoure, et il n'y a pas besoin de leur gâcher cet intérêt par la création de contraintes ou de récompenses pour le travail bien fait. Un sourire de la maîtresse, une tape sur l'épaule constituent des récompenses bien suffisantes.

En agissant de la sorte, les enfants se trouveront encouragés à apprendre la mathématique pour elle-même, et non pour briller ou « gratter » leurs condisciples à la course aux résultats. Il se formera des groupes, qui changeront de composition et se reformeront, à mesure que certains enfants apprendront plus vite que d'autres. Il y aura place aussi pour la progression individuelle et il y aura aussi enfin, des moments où il sera plus profitable de prendre toute la classe en bloc. On trouvera à propos des ensembles un exemple, qui illustre ce passage, d'une discussion avec toute la classe au travail par groupes.

La manière sans doute la plus satisfaisante d'introduire les ensembles sera de considérer les enfants de la classe comme les membres possibles de divers ensembles. En d'autres termes, l'ensemble de base peut, pour commencer, être défini comme celui de tous les enfants de la classe. Plus tard, également, c'est en prenant les enfants eux-mêmes que l'on pourra le plus commodément jouer à des jeux d'équivalences. Quand on posera la question : « Y a-t-il plus de chaises que d'enfants ou plus d'enfants que de chaises ? » les enfants découvriront rapidement la réponse, si on les laisse faire, en essayant chacun de s'asseoir sur une chaise. Si tous les enfants peuvent s'asseoir, un par chaise, et qu'il reste des chaises libres, alors, bien entendu, il y a plus de chaises – et personne n'a compté ni les enfants ni les chaises. Dans ce genre de situations, l'expérience conjointe de toute la classe, ou au moins d'une bonne partie de la classe, sera avantageuse. Aussi n'est-il pas possible de poser de règles rigides sur les avantages respectifs du travail individuel, du travail en petits groupes et du travail de toute la classe en fonction des diverses situations. Il appartient en dernier ressort au maître de choisir ce qui lui paraît la meilleure manière

1. « Teaching situation » et « learning situation ». Il s'agit là de mots-clés de la pensée de l'auteur. L'enfant ne doit pas « recevoir un enseignement » mais « apprendre », « acquérir par son propre effort, par le tâtonnement, comme un apprenti le fait de son futur métier ». C'est pourquoi nous parlerons toujours d'*apprentissage* ou d'*acquisition* (NDT).

d'aborder la situation dans laquelle il se trouve. Très souvent, quand il s'agit d'introduire un aspect nouveau, il vaut mieux prendre la classe en sa totalité, mais pas pour longtemps, car il peut se faire que les progrès aient été si divers en qualité que l'étape suivante doive être abordée par groupes – et cela peut devenir nécessaire avant même qu'une leçon ait pris fin.

Un élément important de l'apprentissage, c'est la discussion entre les enfants. Pour l'illustrer, prenons le cas d'un jeu logique, comportant la formation d'un diagramme de Venn sur le parquet de la classe. Si l'un des enfants pose une pièce au mauvais endroit, il est beaucoup plus profitable que l'erreur soit signalée par un camarade que par le maître. Les deux enfants pourront en discuter sur un pied d'égalité, et généralement l'enfant qui pense que la pièce a été mal placée va en discuter avec beaucoup d'énergie, tandis que l'autre ne manquera pas de répliquer avec acharnement. Mais les règles du jeu sont assez simples pour que finalement la vérité jaillisse toute seule de la discussion. C'est là un excellent entraînement, car il est infiniment préférable d'encourager les enfants à faire appel à la vérité, plutôt qu'à l'autorité de quelque personne chargée de la dispenser, le maître par exemple.

Si l'on encourage les enfants à discuter, non seulement de ce qu'ils sont en train de faire, mais encore de ce qu'ils croient avoir découvert, il en résultera naturellement un certain bruit dans la classe. Tout aussi naturellement ne sera-t-il pas nécessaire de laisser ce « vacarme » se développer jusqu'à interdire tout apprentissage ou interrompre l'activité des autres classes. Le maître doit demeurer bien persuadé que c'est lui qui a la responsabilité de la classe, et insister pour que ce bruit nécessaire demeure limité. Cependant, du point de vue des enfants, c'est étonnant le volume de bruit qu'ils peuvent supporter tout en se livrant à de délicats efforts de pensée. C'est généralement le maître que ce bruit excessif « rend fou », pas les enfants. Par contre, de même que le maître doit se faire à l'idée d'une situation plus bruyante, de même il faut que les enfants apprennent à tenir compte d'autrui. Selon notre propre expérience, avec un peu de concessions de part et d'autre, on y arrive très bien.

Si les enfants apprennent mieux avec des méthodes actives, et si la discussion peut aider à une telle acquisition du savoir, il faut que le maître s'adapte à cette nouvelle situation, de même que si des enfants doivent apprendre dans une situation scolaire classique, avec d'autres salles à côté, il faut qu'ils limitent le volume du bruit qu'ils produisent.

Pour mettre en œuvre un programme d'apprentissage du type décrit dans cet ouvrage, il faut une quantité assez importante de matériel, manipulé tant par les enfants que par le maître. Cet élément, joint à celui du travail individuel ou en groupes, conduit à la nécessité d'une certaine organisation. Si les activités et le matériel ne sont pas soigneusement organisés, il y aura chaos, perte de temps, et médiocres conditions d'étude. Pour s'assurer que chaque enfant sait par quoi commencer la leçon, on peut, par exemple, faire un schéma au tableau,

avec les noms des enfants ou des groupes à côté de chacun des éléments du schéma. Il y faudra parfois des dessins, si les enfants ne sont pas encore en mesure de lire des instructions : trois cercles entrelacés pour un diagramme de Venn, quelques blocs rapidement esquissés pour un jeu d'échanges. Le matériel doit avoir une place bien déterminée, dans la classe ou dans le couloir, où les enfants puissent l'atteindre : avant la leçon de mathématique, le maître n'aura plus qu'à demander à certains enfants responsables de prendre le matériel, de le mettre où il faut, de distribuer les cartes, etc. A la fin de la leçon on chargera les enfants de vérifier le matériel, de le remettre dans les boîtes, de tout ranger bien en ordre dans les armoires.

Une fois une telle organisation instituée, il ne semble pas y avoir de difficultés à mettre la classe en marche, mais ce qui est certain, c'est qu'il faut de l'organisation, car les choses ne se font pas d'elles-mêmes.

Sauf quand il s'agira d'introduire un nouvel aspect, le maître fera bien d'échelonner les permutations entre groupes ou entre enfants isolés, dans toute la mesure possible, afin qu'au début d'une leçon la majorité des enfants soient en train de continuer dans une activité dont ils ont déjà quelque connaissance, tandis que seul un petit nombre d'enfants est initié à une nouveauté. Cela aussi exige de grandes capacités d'organisateur.

Il n'est pas possible à un maître formé selon la tradition de passer à ce genre de mathématiques sans un certain retour sur lui-même et sans le changement d'attitude qui doit en résulter. Par exemple, l'idée que c'est la vérité qui est l'autorité, et non le maître, est parfois difficile à admettre pour certains. D'ailleurs, les enfants eux-mêmes ont l'habitude de demander au maître : c'est tellement plus simple! Il est extrêmement tentant de s'interposer lorsque l'enfant commet une erreur, et de lui dire comment il faut faire. Il est vraiment difficile de rester là, à côté d'un enfant, et de le voir patauger, se perdre dans son problème, alors qu'il suffirait de dire : « Tiens, pose le comme çà », et que ce serait fait. Seulement, cela n'aboutirait qu'à le frustrer du profit que devrait lui procurer une situation d'apprentissage, dont l'objet est de l'amener à découvrir *lui-même* la solution. En résolvant par lui-même, il a l'occasion de fixer la solution dans son esprit d'une manière beaucoup plus claire et plus durable que si c'est le maître qui lui dit ce qu'il doit faire.

En outre, que les maîtres se souviennent bien que leur manière de penser n'est pas forcément celle des enfants. En fait, le mode de pensée des enfants est très différent de celui des adultes ; il varie même d'un enfant à l'autre. Il n'existe pas une manière unique de résoudre un problème. Très souvent un enfant, si on lui en donne l'occasion, suggérera un chemin d'approche du problème qui ne sera pas du tout celui que le maître aurait choisi – et qui pourra même paraître tout à fait erroné à ce dernier. La meilleure méthode pédagogique, dans ce cas, serait pour le maître d'éviter de dire « Non, ce n'est pas comme cela. Faites comme ceci » mais, plutôt, de se joindre à l'enfant pour chercher avec lui ce que vaut sa suggestion. Il pourrait s'en suivre une discussion, ou un acte de découverte en commun, la méthode proposée par l'élève étant jugée sur ses mérites : si elle est bonne, et si l'enfant est assez intelligent pour la suivre jusqu'au bout, il convaincra peut-être le maître. Dans le cas contraire, et si l'enfant continue à tâtonner et à s'apercevoir que sa méthode n'est pas fameuse, il sera toujours temps pour le maître de lui faire entendre qu'une autre manière d'aborder le problème serait peut-être préférable.

Ne nous faites surtout pas dire, sous prétexte que nous suggérons de ne pas s'ingérer à contre-temps dans l'activité des enfants, qu'il faut toujours les laisser se débrouiller tout seuls. Une suggestion bien placée, au bon moment, de la part du maître, est un élément tout à fait nécessaire du processus d'apprentissage, mais elle ne doit jamais prendre la forme d'un ordre. Elle doit toujours demeurer une suggestion. Si un enfant commet une erreur, il ne faut pas lui en démonter longuement le mécanisme, même si le maître ne le voit que trop clairement. Il faut que les conséquences de ses erreurs se révèlent d'elles-mêmes à l'enfant ; il doit voir que le résultat est absurde, et c'est alors que pénétrera en lui l'idée que sa méthode n'était pas bonne. Il est de beaucoup préférable de découvrir soi-même ses erreurs, plutôt que de se les entendre exposer par un autre, car cette découverte constitue en soi un élément d'apprentissage de la question. Si l'on dit à l'enfant : « Non. C'est faux ; ce n'est pas comme cela qu'on fait, c'est comme ceci », il n'apprend rien, car il n'a eu aucune expérience personnelle de la manipulation.

Il est extrêmement difficile de se faire une idée de la manière dont se déroule une telle classe composée d'enfants de cinq, six ou sept ans si on ne l'a pas vraiment vue en action. Nous espérons que le plus grand nombre possible d'instituteurs qui voudraient mettre en pratique les suggestions de cet ouvrage pourront aller dans une école où ces méthodes sont déjà appliquées [1].

1. On peut s'informer auprès du Service de la Recherche pédagogique de l'Institut pédagogique national, 29, rue d'Ulm, Paris 5e, ou du CEPAM, 65, rue Claude-Bernard, Paris 5e.

Première Partie

LA LOGIQUE

1. IDÉES FONDAMENTALES

Une partie importante de la mathématique est consacrée à l'étude des nombres. Les nombres n'ont pas d'existence concrète comme les objets que nous voyons autour de nous. Les nombres sont des propriétés, tout comme les couleurs, les formes, les dimensions, etc. Il n'existe pas d'objet qui s'appelle « un grand », mais il y a des objets grands. La grandeur est une propriété sans existence concrète. Il en est de même de la couleur ; on ne peut pas dire « Voilà un bleu »... à moins de parler d'un conscrit ; mais il y a des objets bleus. Les dimensions, les couleurs, les formes sont des propriétés, ou des attributs, qui se rapportent à des objets individualisés. Le nombre est une propriété qui se rapporte aux collections, aux ensembles d'objets. Aucun objet ne peut avoir la propriété « deux ». Mais un ensemble d'objets peut avoir la propriété « deux ». Aussi est-il évident qu'avant d'étudier les nombres il faut étudier les ensembles d'objets. Il faut bien comprendre que les ensembles se rapportent aux objets et les nombres aux ensembles. Les objets sont le matériau de base de toute expérience ; aussitôt que nous commençons à grouper des objets et à en former des ensembles, nous sommes déjà en train d'organiser ce matériau, cette expérience fondamentale, dans nos esprits, parce qu'il nous faut trier nos expériences premières pour en tirer une signification. Les ensembles sont déjà des abstractions. L'une des manières de trier nos ensembles c'est de les ranger en « classes d'équivalence » : nous pouvons les trier d'après le nombre d'éléments qu'ils comportent. Ainsi tous les ensembles à un élément seront rangés dans la classe 1. Tous les ensembles à deux éléments seront rangés dans la classe 2. Et ainsi de suite. Tous les éléments appartenant à la même classe ont la même propriété du point de vue du nombre.

Il y a plusieurs manières de définir les ensembles. L'une d'elles consisterait à en énumérer tous les éléments. Cela pourrait être fastidieux s'ils comportaient un grand nombre d'éléments, par exemple tous les habitants de la Loire. Aussi la manière la plus courante de définir les grands ensembles est-elle de décider des attributs que doivent posséder leurs éléments. Mais il ne suffit pas de décider de ces attributs. Par exemple, si nous disons « Les habitants de la Loire », ne parlons-nous que des habitants humains, ou faut-il y inclure certains animaux, et, dans ce cas, lesquels? Il nous faut décider d'un ensemble fondamental, ou univers, aux éléments duquel vont s'appliquer les attributs à utiliser. Cet univers, dans notre exemple, serait celui des « êtres humains vivants » et alors « être un habitant de la Loire » va sélectionner un certain ensemble bien défini de gens extraits de la famille humaine tout entière. Mais même ainsi, il nous faut prendre soin que le critère soit, dans tous les cas, décisif. Par exemple, il nous faut définir clairement ce que nous entendons par « habitant ». S'agit-il de « ceux qui ont un domicile fixe dans la Loire » ou de « tous ceux qui s'y trouvent de passage un certain jour »? Une fois le critère défini avec une précision suffisante pour nous permettre de dire si un membre quelconque de l'univers possède ou ne possède pas l'attribut en question, on peut affirmer que cet attribut définit bien un ensemble.

Il existe des *relations* entre les ensembles : ainsi le fait pour un ensemble d'être inclus dans un autre, ou pour un ensemble de n'avoir aucun élément commun avec un autre, ou encore pour un ensemble d'avoir exactement les mêmes éléments qu'un autre (auquel cas ce n'en est pas en réalité « un autre »!). Ces relations, il nous les faut étudier. Il y a aussi des *opérations* que l'on peut effectuer sur les ensembles et qui conduisent à l'apparition d'autres ensembles. Par exemple, considérons l'opération de « trouver la partie commune à deux ensembles » ; soit les ensembles définis par les attributs suivants :

« gagnant moins de 10.000 fr. par an », « habitants de la Provence ».

Chacun de ces attributs définit un ensemble de personnes. L'ensemble des personnes possédant ces deux attributs constituera la partie commune, ou *intersection* des deux ensembles définis par les attributs séparément. Cet « ensemble d'intersection » ou « ensemble des parties communes » va être composé des personnes possédant comme attribut :

« de gagner moins de 10.000 fr. par an *ET* d'être habitant de la Provence ».

Ainsi, quand nous unissons les deux attributs par le mot ET, nous formons l'intersection d'ensembles définis par des attributs distincts.

Nous pourrions également considérer l'opération de « réunion de deux ensembles ». Si nous voulions assembler toutes les personnes « gagnant moins de 10.000 fr. par an » avec toutes celles qui seraient « habitants de la Provence », nous procéderions à la *réunion* de deux ensembles distincts. Quel est l'attribut de ce nouvel ensemble? Manifestement, c'est « ou bien gagner moins de 10.000 fr. par an ou bien habiter en Provence », du moment qu'il est entendu que « ou bien... ou bien » est pris dans le sens inclusif, c'est-à-dire qu'il inclut tous les Provençaux gagnant moins de 10.000 fr. par an aussi bien que tous les autres Provençaux et aussi les non-Provençaux gagnant moins de 10.000 fr. par an. Ainsi, lorsque nous réunissons deux attributs par les mots « ou bien... ou bien », nous formons une réunion d'ensembles définie par des attributs distincts.

Il y a une autre opération très simple sur les ensembles qui est extrêmement importante. C'est la formation de l'ensemble complémentaire. Par exemple, l'ensemble complémentaire de celui des personnes gagnant moins de 10.000 fr. par an est l'ensemble des personnes gagnant 10.000 fr. par an et davantage. L'ensemble complémentaire de celui des Provençaux est celui formé par les non-Provençaux. Pour obtenir l'attribut applicable au complément d'un ensemble, il nous faut mettre le mot « non » devant le mot définissant notre ensemble. Par exemple, si tous les objets d'une certaine chambre forment l'univers, l'attribut « rouge » définit l'ensemble des objets rouges de cette chambre. L'attribut « non-rouge » définit le complément de l'ensemble des objets rouges, cet ensemble consistant en tous les objets de la chambre qui ne sont pas éléments de l'ensemble « rouge ».

L'étude des relations entre les attributs telles qu'elles sont exprimées par des « conjonctions » comme « et », « ou...ou », « non » et ainsi de suite, et l'étude des relations entre ces conjonctions sont connues sous le nom de calcul propositionnel. Dans ce livre, nous décrirons comment les enfants, à partir de cinq ans, peuvent commencer de s'initier au calcul propositionnel.

2. LES BLOCS LOGIQUES

C'est par leurs propres expériences, et non par celles des autres que les jeunes enfants apprennent le mieux. Aussi les relations logiques que nous voudrions voir apprendre par les enfants devront-elles être incorporées dans des relations effectivement observables entre des attributs faciles à distinguer tels que couleur, forme, etc. Il y a quelque temps que cette technique est utilisée pour tester la pensée logique (formation des concepts) ; c'est probablement par le psychologue russe Vygotsky qu'elle a pour la première fois été utilisée d'une manière systématique. William Hull a été le premier à montrer de manière pratique[1] que des enfants de cinq ans pouvaient se livrer à une pensée logique d'un ordre élevé, pourvu que les exercices fussent convenablement choisis et adaptés au stade de développement de ces enfants, et pourvu que le plus grand soin fût pris pour qu'un verbalisme excessif ne vînt pas faire obstacle au processus de formation des concepts. Les blocs que nous décrirons ici diffèrent légèrement de ceux qui ont été utilisés par Hull pour ces premières expériences ; certains des jeux décrits ici sont presqu'identiques à ceux qui furent joués par le premier groupe expérimental, d'autres sont des développements de ces jeux, certains mis au point par les enfants eux-mêmes, d'autres encore sont tout à fait nouveaux, tels les jeux de transformations et les jeux de disjonction. Les instructions données avec les jeux sont largement basées sur les expériences faites avec des enfants de 5 à 7 ans

1. *Concept Work with Young Children*, Bulletin of the International Study Group for Mathematics Learning, Vol. I, no. 2, 1963.

en Australie, mais il faut noter qu'une bonne part des expériences a eu lieu dans des endroits aussi différents que Québec, Boston, Hawaï, le Leicestershire (Angleterre), Genève, Paris, le Surrey (Angleterre), la Californie, les Philippines et la Nouvelle Guinée.

Les blocs logiques sont composés de la façon suivante [1] :

carré grand épais rouge,	carré grand épais bleu,	carré grand épais jaune,
rectangle grand épais rouge,	rectangle grand épais bleu,	rectangle grand épais jaune,
triangle grand épais rouge,	triangle grand épais bleu,	triangle grand épais jaune,
cercle grand épais rouge,	cercle grand épais bleu,	cercle grand épais jaune,
carré grand mince rouge,	carré grand mince bleu,	carré grand mince jaune,
rectangle grand mince rouge,	rectangle grand mince bleu,	rectangle grand mince jaune,
triangle grand mince rouge,	triangle grand mince bleu,	triangle grand mince jaune,
cercle grand mince rouge,	cercle grand mince bleu,	cercle grand mince jaune,
carré petit épais rouge,	carré petit épais bleu,	carré petit épais jaune,
rectangle petit épais rouge,	rectangle petit épais bleu,	rectangle petit épais jaune,
triangle petit épais rouge,	triangle petit épais bleu,	triangle petit épais jaune,
cercle petit épais rouge,	cercle petit épais bleu,	cercle petit épais jaune,
carré petit mince rouge,	carré petit mince bleu,	carré petit mince jaune,
rectangle petit mince rouge,	rectangle petit mince bleu,	rectangle petit mince jaune,
triangle petit mince rouge,	triangle petit mince bleu,	triangle petit mince jaune,
cercle petit mince rouge,	cercle petit mince bleu,	cercle petit mince jaune.

On voit qu'il y a quatre **variables** :

1) **grandeur** 2) **épaisseur** 3) **couleur** 4) **forme**

Les variables grandeur et épaisseur ont chacune deux valeurs : grand et petit pour la taille, épais et mince pour l'épaisseur. La variable couleur a trois valeurs: rouge, bleu et jaune ; la variable forme a quatre valeurs : carré, rectangle, triangle et cercle. Chaque pièce de l'ensemble a quatre « noms », comme on l'a indiqué plus haut. Les enfants apprendront vite les noms des pièces de façon à pouvoir retirer de l'ensemble toute pièce correctement nommée. La bonne connaissance des noms des pièces est une condition nécessaire à l'exercice de la plupart des jeux décrits dans ce livre.

Avertissement important

Il est extrêmement important de laisser aux enfants la possibilité de *jouer librement longtemps* avec les pièces comme avec tout autre matériel mathématique didactique. Si un enfant refuse de jouer au jeu qu'on lui propose, on le laissera jouer librement comme il l'entend, on laissera libre cours à son imagination et à sa créativité. Il y aura toujours assez d'enfants dans une classe qui auront envie de jouer à nos jeux pour que cette activité semble à un moment ou à un autre désirable à tout enfant de la classe.

1. Les « Blocs logiques » font partie du laboratoire de mathématique de l'O. C. D. L.

3. LES JEUX DE DIFFÉRENCES

3.1. *Le jeu à une différence*

Entre deux blocs logiques, il y a au moins une différence. Il peut s'agir de la grandeur, de l'épaisseur, de la couleur ou de la forme. Naturellement, les blocs peuvent différer les uns des autres de plus d'une façon. Si un grand carré rouge épais ne diffère d'un grand carré rouge mince qu'en ce qui concerne l'épaisseur, un grand carré rouge épais diffère d'un grand carré bleu mince par l'épaisseur et la couleur. C'est pour aider les enfants à prendre conscience de ces différences ou de ces similitudes que les exercices ci-dessous leur sont proposés.

Un élève place une pièce quelconque de l'ensemble sur la table. L'élève suivant choisira une pièce qui ne diffère de la première que par un seul attribut. Cette différence ne peut concerner que la grandeur, l'épaisseur, la couleur ou la forme. Le suivant, qui serait le premier joueur s'il n'y a que deux enfants, choisira une troisième pièce qui ne diffère de la seconde également que par un seul attribut. Cet exercice continuera de la sorte jusqu'à ce que toutes, ou presque toutes les pièces, soient disposées dans une rangée. Chaque joueur aura le droit de contrôler ceux qui le précèdent. Si l'un des élèves croit que celui qui a joué avant lui a commis une erreur, il peut le dire. S'il a raison, il gagne un point, s'il a tort, il en perd un. Chaque choix exact est crédité d'un point. On peut donc gagner des points :

1. soit en jouant correctement selon la règle établie ;
2. soit en découvrant que quelqu'un n'a pas respecté la règle.

L'élève qui aura obtenu le plus grand nombre de points sera le gagnant. Le fait que tous les joueurs soient invités à contrôler leurs coéquipiers les encourage à se concentrer non seulement sur leur propre jeu, mais aussi sur celui des autres.

3.2. *Le jeu à deux différences*

Il s'agit de la suite du jeu précédent. Le premier élève choisit une pièce quelconque de l'ensemble. Le suivant doit choisir une pièce qui diffère de la première par deux et seulement deux attributs. Si, par exemple, un grand carré rouge épais a été choisi, le joueur suivant peut poser un petit carré rouge mince. Dans ce cas, la deuxième pièce diffère de la première par la dimension et l'épaisseur, mais elle pourrait également différer de la première par deux autres attributs. Un grand carré bleu et mince aurait également été une bonne seconde pièce, de même qu'un grand rond épais et jaune. Les joueurs se contrôleront mutuellement. En ce qui concerne les points, les mêmes règles que précédemment seront appliquées.

Ce jeu peut être étendu à trois ou même à quatre différences. Les élèves aiment souvent établir leurs propres règles et combiner d'une certaine façon la suite des différences. Ils peuvent, par exemple, commencer par une différence, enchaîner avec deux, trois et quatre différences, pour revenir à une différence et recommencer le cycle. Il faut naturellement les autoriser à combiner ces successions comme ils l'entendent.

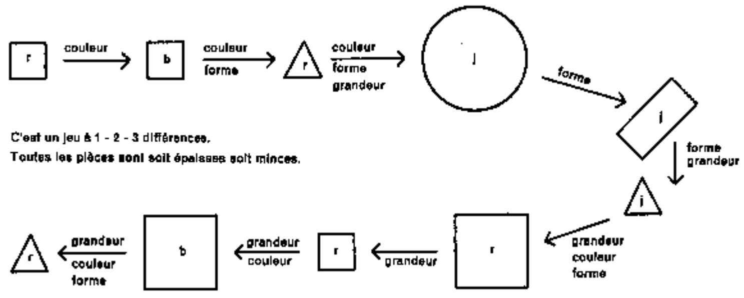


Fig. 1

3.3. *Le jeu de domino*

Il s'agit d'une forme plus compliquée du jeu des différences qui consiste à jouer simultanément en deux directions : de gauche à droite et d'arrière en avant. Dans la ligne de gauche à droite, nous avons une différence, dans la ligne d'arrière en avant deux différences. On peut parler d'un jeu en forme de croix. Un problème intéressant et difficile est de remplir les coins.

Ci-dessous, fig. 2, les commencements possibles d'un jeu en croix. Les pièces ici dessinées sont supposées toutes épaisses.

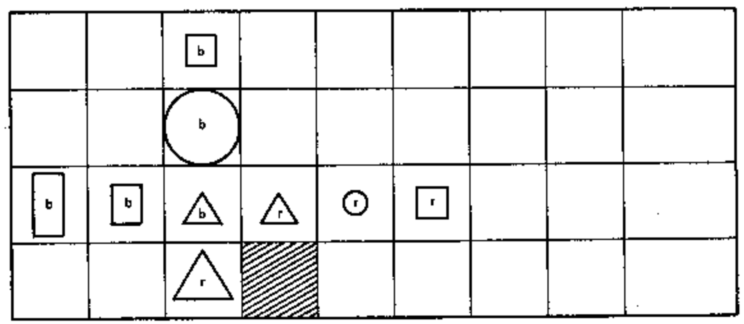


Fig. 2 *Jeu de domino : de gauche à droite, il y a une différence entre deux pièces, de haut en bas, deux différences. Dans le carré hachuré on pourrait placer un grand triangle bleu.*

Supposons que, de gauche à droite, ait été posée une rangée de cinq ou six pièces, rangée traversée à un certain endroit par une rangée orthogonale : il y aura quatre coins autour de cette intersection. Pour remplir ces coins, il sera nécessaire d'avoir une pièce qui diffère par un attribut d'une des pièces et par deux attributs de l'autre. C'est en en essayant de résoudre ce problème que l'on s'apercevra de la nature de ce jeu des attributs croisés.

L'espace hachuré représenté dans la figure 2 pourrait être rempli soit par un cercle grand rouge épais, soit par un carré grand rouge épais, soit par un triangle grand jaune épais, soit par un triangle grand bleu épais...

Il est conseillé de donner aux élèves autant de points que de différences correctement établies. Un coin correctement rempli vaudra au joueur 3 points : 1 point pour la différence correctement établie dans la direction de gauche à droite, et 2 points pour les 2 différences dans la direction d'arrière en avant. L'élève qui découvre une erreur aura droit à 3 points. A celui qui a fait l'erreur, 3 points seront enlevés.

Un autre perfectionnement du jeu consiste à construire en hauteur, c'est-à-dire à empiler les pièces. Les différences en hauteur d'une pièce à celle du dessus si l'on fait une « tour » avec les pièces, peuvent être de trois attributs.

Notre jeu d'attributs croisés aura, dans ce cas, non seulement une couche, mais plusieurs. Bien entendu chaque couche doit être constituée par des attributs croisés corrects ; autrement dit on essaiera de construire un jeu d'attributs croisés à trois dimensions. Il paraîtra sans doute, à première vue, qu'un tel exercice dépasse les possibilités d'enfants de 5 à 7 ans. Mais s'il est vrai que certains enfants ne sont pas capables de dominer une telle complexité, d'autres en revanche en sont capables. Il ne serait pas juste de priver les enfants d'exercer leurs capacités, de ne pas leur donner la possibilité d'éprouver leurs forces. C'est d'autant plus facile que chaque équipe jouera à un jeu différent et en rapport avec la maturité des enfants qui la composent.

Dans le jeu d'attributs croisés on a trouvé qu'une direction à quatre différences est plus facile à réussir lorsqu'elle est croisée avec une direction à une différence. Les enfants peuvent, en effet, voir d'un simple coup d'œil qu'une pièce est très différente d'une autre. Ils peuvent aussi plus aisément découvrir une erreur parce que, dans le cas d'une erreur, il y aura un attribut commun aux deux pièces et que cette situation n'est pas autorisée par la règle.

On doit mettre en garde les maîtres de ne pas faire énumérer prématurément les différences par les enfants. Les enfants acquièrent une puissance de discrimination tout à fait incroyable dans ces jeux où ils se trompent rarement.

Le jeu par paires sera introduit pour amener ces intuitions au niveau de la pleine conscience. C'est une intéressante extension du jeu de domino qui a été quelquefois jouée par de jeunes enfants. Cette extension devient possible quand toutes les pièces ont été utilisées et que les enfants désirent placer les pièces autour de celles qui ont déjà été placées.

Dans ce cas on peut dire aux enfants qu'ils peuvent acheter une pièce ou même deux ou trois, le prix d'une pièce étant le nombre de différences entre cette pièce et le corps de blocs restants. Il est quelquefois possible de faire de cette manière un bénéfice... ou une perte! On peut pratiquer ce jeu en stipulant que chaque enfant doit décider combien de pièces il va acheter, sans toutefois dépasser trois. Quand il aura acheté ces pièces, il sera libre de les placer en conformité avec les règles du jeu. Ainsi, un enfant pourra perdre sur une pièce et gagner sur une autre.

3.4. *Le jeu des contradictions*

Des enfants ont inventé une version encore plus difficile de ce jeu, version dans laquelle ils prouvent que certains espaces ne peuvent pas être remplis. Ils placent une pierre ou tout autre objet quelconque dans un tel espace. Supposons, par exemple, que dans la rangée de gauche à droite il y ait un espace à remplir et qu'il y ait trois différences entre la pièce de gauche et celle de droite. Comme il faudrait faire cela en deux mouvements, mais qu'il y a un seul espace entre les pièces, il s'agit clairement d'une impossibilité puisqu'il n'est permis de faire qu'une seule différence à la fois de gauche à droite. Une pierre devrait être placée dans cet espace. Un nombre de points élevé, par exemple 5, est attribué à l'élève qui apporte la preuve qu'un tel espace ne peut pas être rempli et le même nombre de points sera attribué à qui contestera avec succès la validité de la démonstration.

A la fin du jeu, comme les pièces seront de moins en moins nombreuses, certains espaces seront difficiles à remplir parce que les pièces dont on aurait besoin ont déjà été utilisées. Dans ce cas, ce n'est pas une impossibilité logique qui empêche de remplir les espaces, mais simplement un manque de pièces. Une autre sorte d'objet sera placée dans un tel espace, par exemple, un crayon ou une gomme. Les enfants découvrent spontanément la différence entre ces deux impossibilités.

4. LE JEU DES PAIRES

4.1. *Le jeu avec 8 pièces*

On choisit 8 pièces. On détermine 3 variables, par exemple : la forme, la couleur et la grandeur, avec deux valeurs pour chaque variable, c'est-à-dire 2 formes, 2 couleurs et 2 grandeurs. Les 2 formes pourront être le carré et le rectangle, les deux couleurs le rouge et le bleu, les deux grandeurs seront évidemment grand et petit. Si toutes les combinaisons de ces attributs doivent être représentées dans le jeu, il y aura, naturellement, 8 pièces. Le premier joueur forme avec deux pièces quelconques une paire. On demande au second joueur de construire une autre paire de la même manière que le premier joueur. Cela signifie que les différences entre les pièces de la deuxième paire doivent être les mêmes qu'entre les pièces de la première paire. Si, par exemple, la première paire est formée par le grand carré rouge et le petit carré rouge, ce n'est que la dimension qui a varié. La seconde paire droit être construite de façon similaire et peut être par exemple : le grand carré bleu et le petit carré bleu.

La troisième paire doit être également formée sur la base des mêmes différences que la première et la seconde paires. Si la troisième paire a été construite correctement, la quatrième en résultera automatiquement. Tous les joueurs ont le droit de contrôler ceux qui les précèdent. Il faudra établir des tours pour la première paire afin de donner des chances égales à tous les enfants.

4.2. *Réaliser toutes les paires*

Il y a exactement sept façons différentes de construire les paires avec les huit pièces choisies comme il a été indiqué dans le paragraphe précédent. Réaliser ces sept façons est le but du jeu. Chaque façon de construire les paires comprend naturellement quatre paires, chaque paire étant constituée d'une manière similaire. On établit une règle de jeu selon laquelle aucune paire ne doit être répétée, c'est-à-dire que si deux pièces ont été assemblées comme paire, on ne peut pas une deuxième fois en faire une paire. Selon cette règle, il y a sept manières différentes de construire des paires.

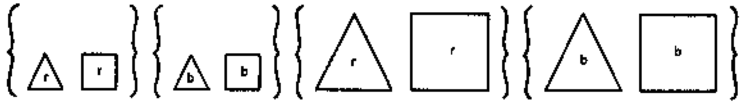
Chaque enfant peut contrôler la régularité du jeu et s'il découvre une telle répétition, le joueur qui a commis l'erreur perd un point et celui qui l'a découverte en gagne un. Celui qui a obtenu le plus grand nombre de points gagne la partie.

4.3. *Méthode de notation*

Il est très difficile de jouer le jeu ci-dessus sans établir une méthode pour enregistrer les façons de faire les paires. On peut s'en remettre aux enfants pour résoudre ce problème. Pour commencer, ils dessineront probablement chaque paire qui a été construite. Après un certain temps, ils découvriront une méthode plus systématique, ou bien on peut en suggérer une, par exemple, en établissant le tableau à sept colonnes et trois lignes ci-dessous :

Différence de forme	oui	non	non	oui	non	oui	oui
Différence de couleur	non	oui	non	oui	oui	non	oui
Différence de dimension	non	non	oui	non	oui	oui	oui

La première façon de faire les paires notée pour mémoire sur le tableau dans la première colonne est celle-ci :



La cinquième façon de faire les paires (voir 5ème colonne du tableau) serait la suivante :

Fig. 3

On peut inscrire dans les colonnes « oui » ou « non » ou faire des croix, ou n'importe quel autre signe que les enfants auront choisi. Chaque colonne représente une manière de faire les paires. De cette façon, on pourra se rendre compte de ce qui a déjà été fait et le contrôle pourra avoir lieu sans qu'une discussion s'élève entre les enfants pour savoir si, oui ou non, une paire a déjà été formée. La difficulté de trancher une telle discussion sera pour les enfants une preuve très convaincante qu'il faut enregistrer les événements d'une certaine manière pour s'en souvenir.

4.4. *Le jeu avec 16 pièces*

Si, au lieu de trois variables, on introduit la quatrième, c'est-à-dire l'épaisseur, il y aura seize pièces dans le jeu et, dans chaque façon de faire les paires, il y aura 8 paires. Dans ce cas, il y aura quinze façons différentes possibles de faire les paires. C'est là une tâche plutôt difficile et seuls les enfants les plus doués seront capables de la résoudre. On peut naturellement restreindre le jeu à deux variables au lieu de trois, c'est-à-dire forme et couleur, chacune ayant deux valeurs.

Dans ce cas, il n'y aura que quatre pièces dans l'ensemble et seulement trois façons de faire les paires. L'expérience a montré qu'il est préférable de commencer par un ensemble de huit pièces, de passer ensuite à un ensemble de quatre et, en troisième lieu seulement, à un jeu de seize pièces.

Le jeu peut être généralisé à d'autres attributs comme la couleur des cheveux, la couleur des yeux, le sexe des enfants, etc., de sorte que l'on puisse former les paires avec les enfants eux-mêmes. Supposons que nous choisissions des enfants blonds et des enfants bruns, des enfants aux yeux bleus et aux yeux bruns, des garçons et des filles. Dans ce cas, il y aura huit enfants différents dans chaque ensemble. On peut leur

demander de se former eux-mêmes par paires et de découvrir de combien de manières différentes ils peuvent constituer des paires sans qu'aucune paire ne soit répétée. Il y aura, naturellement, sept façons de former les paires et, dans chaque façon, il y aura 4 paires. De tels exercices aideront les enfants à transposer leur pensée logique à d'autres situations. On peut leur demander d'inventer d'autres situations où le même jeu, ou des jeux similaires, peuvent être joués. Par exemple: avec des images d'enfants maigres et d'enfants gros, d'enfants aux cheveux bouclés et d'enfants aux cheveaux raides, de garçons et de filles, et toutes les combinaisons de celles-ci fourniront un ensemble de jeux de cartes qui pourront être utilisées de la même façon que les « blocs logiques ». Évidemment, bien d'autres attributs peuvent être utilisés.

5. LES JEUX DE NÉGATION

5.1. *Le jeu de négation simple avec deux équipes*

Le but de ce jeu est de faire prendre conscience aux enfants du principe de contradiction, c'est-à-dire : si une chose est à un certain endroit, elle ne peut pas être en même temps ailleurs. On forme deux équipes de trois à quatre enfants par équipe qui seront assises chacune d'un côté de la table. On sépare la table en deux par un « mur » bâti avec des livres ou des cartables, en sorte que l'équipe A peut placer au pied du mur des blocs qui seront invisibles pour l'équipe B d'en face. Chaque côté possède 24 blocs choisis au hasard. L'équipe A commence le jeu et demande un bloc à l'équipe B en le désignant correctement par ses quatre attributs. Si le bloc se trouve effectivement en possession de l'équipe B, il doit être donné à l'équipe A. Ensuite, c'est l'équipe B qui demande un bloc à l'équipe A, et ainsi de suite. Chaque bloc qui a été nommé une fois ne peut pas être demandé une deuxième fois. Le jeu peut être terminé quand une équipe a un certain nombre de pièces de plus que l'autre.

On constate qu'au commencement beaucoup d'enfants demandent des blocs qu'ils voient de leur côté. Ils ne comprennent pas que si la pièce se trouve chez eux, la même pièce ne peut pas être également de l'autre côté, comme ils ne comprennent pas non plus que si la pièce n'est pas de leur côté, elle doit être nécessairement de l'autre côté. Il y a dans ce jeu, comme en germe, la notion d'*implication*. Les enfants apprennent que si chaque pièce est ou bien d'un côté ou bien de l'autre côté, ils peuvent en conclure que, si elle est ici, elle ne peut pas être là-bas, et également, si elle n'est pas ici, elle est nécessairement là-bas. Ces deux déductions de la situation « ou bien… ou bien », chaque pièce étant ou bien ici ou bien là-bas, est un pas logique très important. Les enfants apprennent vite à jouer ce jeu et dès qu'ils atteignent le stade où ils ne font plus d'erreur, on cessera d'y jouer.

5.2. *Le jeu de la pièce cachée*

Il s'agit d'une variante plus difficile du jeu de la négation qui peut être jouée par un groupe de quatre ou six enfants. Un enfant cache une pièce, pendant que les autres ferment les yeux. La pièce sera cachée sous une boîte ou dans une poche. Le reste de l'équipe doit découvrir quelle pièce a été cachée. Au commencement, les enfants essayeront d'ordonner les blocs restants par piles, afin de déterminer la pièce cachée. On les laissera faire, car c'est une manière naturelle de mettre de l'ordre dans un chaos apparent. Quand ils auront réussi plusieurs fois à trouver la bonne pièce en mettant de l'ordre parmi celles qui sont restées sur la table, on leur suggérera de deviner la pièce cachée sans toucher aux pièces. Dès qu'ils seront capables de voir, étalées sur la table, toutes les pièces les unes à côté des autres, ils seront bientôt en mesure de les ordonner mentalement et de découvrir le bloc qui manque. Cette variante plus difficile retient l'attention des enfants dès que la découverte par manipulation des pièces est devenue trop facile.

Pour rendre le jeu plus difficile, on peut cacher plus d'une pièce. Les enfants trouveront que, si l'on cache trois pièces choisies, par exemple, dans les trois couleurs, mais de la même forme, de la même dimension et de la même épaisseur, par exemple tous les petits triangles minces (c'est-à-dire un petit triangle rouge mince, un petit triangle bleu mince, et un petit triangle jaune mince) ils ont du mal à les décrouvir.

Ceci est, en effet, beaucoup plus difficile à trouver que si les trois pièces étaient prises au hasard parce que quand les petites piles sont faites, même mentalement, il n'y a pas de pile manquante. Ceci dépend, bien entendu, de la manière dont les piles seront faites par les enfants.

Une autre variante consiste à cacher quatre ou cinq pièces ou plus à la fois. On peut aussi ne rien cacher du tout. On doit alors faire trouver s'il y a des pièces cachées et, s'il y en a, combien, et lesquelles. Les enfants sont tout à fait capables d'apprendre à le faire sans toucher à aucune pièce.

5.3. *Le jeu des « non »*

Dans ce jeu, un enfant prélève une pièce quelconque et demande aux autres enfants de son groupe de dire tout ce que la pièce choisie n'est pas. Par exemple, l'enfant a choisi un petit carré rouge mince. Cette pièce n'est pas grande, elle n'est pas épaisse, elle n'est pas bleue, elle n'est pas jaune, elle n'est pas un rectangle, pas un triangle et elle n'est pas un cercle. Mais ce n'est pas non plus un triangle rouge, ni un carré rouge épais, etc.

Il arrive que les enfants énoncent des attributs qui ne sont pas ceux des blocs logiques ; ils diront, par exemple, que ce n'est pas noir, que ce n'est pas un lapin, que ça ne se mange pas, etc. De cette façon, l'extension énorme de ce que quelque chose n'est pas sera rendue plus accessible aux enfants.

Une autre forme encore de ce jeu consiste à demander à un enfant d'essayer d'énumérer toutes les choses qu'il n'est pas. Ou bien on peut lui demander de dire, alternativement, ce qu'il est, puis ce qu'il n'est pas, puis ce qu'il est, puis ce qu'il n'est pas, etc.

A la première erreur commise, il sera remplacé par un autre enfant, par exemple, par celui qui aura signalé l'erreur. Celui-ci commencera, à son tour, à énumérer rapidement ce qu'il est et puis ce qu'il n'est pas, etc.

6. LE JEU DES VINGT QUESTIONS

6.1. *Le jeu des réponses*

Pour ce jeu, il est recommandé d'avoir des petits cartons ou des plaques en plastique portant comme symbole les mots « grand », « épais », « mince », « non », d'autres portant des formes: carré, rectangle, triangle, rond, d'autres encore, portant des taches de couleur: bleu, rouge, jaune. On aura besoin d'un grand nombre de plaques. Un enfant est désigné comme chef d'équipe. Il invitera un autre enfant à penser à un bloc sans le nommer. Ensuite, le chef d'équipe invitera ses camarades à poser des questions comme, par exemple : « est-ce rouge ? », « est-ce bleu ? », « est-ce un rectangle ? », « est-ce grand ? », etc. A ces questions, l'enfant qui aura choisi mentalement une pièce répondra par oui ou par non. Chaque fois qu'une question a été posée et la réponse donnée, cette réponse est posée sur la table. Par exemple, si quelqu'un a demandé « est-ce bleu ? » et que la réponse a été « non », alors on pose un carton « non » à gauche d'un carton « bleu » (ou un carton « Non bleu ») sur la table, comme information maintenant utilisable. Ou, si on demande « est-ce grand ? » et que la réponse « oui » a été donnée, on posera un carton portant le mot « grand », etc… On constatera au commencement que les enfants posent trop de questions, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas encore capables de tirer tout le profit de l'information qui se trouve sur la table. Ainsi, si l'on a répondu affirmativement à la question « est-ce grand ? » le carton « grand » se trouve sur la table ; un autre enfant demandera quand même « est-ce petit ? », alors on posera sur la table « non petit ». Les enfants ne comprennent pas nécessairement que « grand » implique « non petit » et que « non petit » implique « grand ». Chaque pièce étant ou bien grande, ou bien petite, si ce n'est pas l'un, c'est nécessairement l'autre.

Si le jeu de négation a été joué, de telles distinctions ou relations seront plus facilement perçues. Le premier enfant qui saura utiliser l'information et qui prendra la bonne pièce sur la table aura le droit de choisir mentalement le bloc à découvrir dans le jeu suivant.

6.2. *Le jeu des réponses et des déductions*

Une variante un peu plus compliquée du jeu précédent consiste à établir deux tableaux : le *tableau des réponses* et le *tableau des déductions*. La réponse aux questions sera placée sur la table des réponses et, si un élève en tire une déduction correcte, celle-ci sera placée sur la table des déductions. Si, à la question « est-ce mince ? » la réponse est « non », on place « non mince » sur la table des réponses. Si quelqu'un dit : « Bon, c'est donc épais », dans ce cas, le chef d'équipe place le mot « épais » sur la table des déductions. Pour faciliter la découverte du bloc choisi mentalement, toute réponse « positive » qui figure sur la table des réponses sera également placée sur la table des déductions. Exemple : si, à la question « est-ce jaune ? » la réponse est « oui » le mot jaune ira aussi bien sur la table des réponses que sur celle des déductions. Cela ne signifie naturellement pas que nous attendons que les enfants déduisent « si c'est jaune, alors c'est jaune », mais seulement des déductions comme celles-ci « si ce n'est pas grand, alors c'est petit », ou « si ce n'est pas épais, alors c'est mince », ou peut-être, des déductions plus compliquées : « si ce n'est pas rouge, ni bleu, alors c'est jaune ». Si les mots « non rouge » aussi bien que « non bleu » figurent sur la table des réponses et que quelqu'un dit « eh bien, c'est jaune » alors le chef d'équipe prend un symbole jaune et le place sur la table des déductions. Si l'on agit de la sorte, la table des déductions donnera à chaque moment les informations les plus cohérentes et les plus concises. En revanche, la table des réponses accumulera rapidement un grand nombre d'informations inutiles comme « épais », « non mince », « non jaune », « non rouge », « bleu », etc. Dans ce jeu également, le premier élève qui devinera la pièce correcte sera chargé de choisir mentalement la suivante.

Dans ce jeu les enfants apprennent à se servir de l'information. Certaines questions fournissent plus d'information que d'autres. Si des enfants demandent : « Est-ce un carré bleu ? » et si la réponse est « non », alors l'information obtenue est que c'est une des 44 pièces au lieu d'une des 48 pièces. Si la réponse est oui, mais c'est bien improbable, alors le pari a été payant et le champ a été énormément rétréci.

Il est improbable que beaucoup d'enfants forment le concept de « pari » avant d'avoir accumulé un grand nombre d'expériences sur cette manière de procéder. La question « est-ce bleu » réduit les 48 possibilités soit à 32 soit à 16, cela dépend de la réponse à la question et, ainsi, cela ressemble moins à un pari.

Les enfants continueront à poser des questions dont ils devraient déjà connaître les réponses s'ils avaient fait attention aux réponses données aux questions précédentes ; autrement dit, ils poseront des questions inutiles. Ce genre de questions sera progressivement éliminé si le jeu est mené de façon compétitive par deux équipes.

Le jeu des vingt questions est à un niveau pratique une excellente introduction à la théorie de l'information. Les enfants qui auront

pratiqué ce jeu seront dans une disposition plus favorable pour comprendre ce que signifie la « mesure » de l'information que ceux qui n'auront pas l'expérience personnelle d'extraction d'informations de situations données et cela de la manière la plus économique.

6.3. *Le jeu de l'ensemble à deviner* [1]

Supposons que les pièces aient été placées de façon ordonnée dans une matrice de six sur huit (un cadre de 48 cases) comme on le décrira dans le jeu des matrices (voir jeu suivant).

On demande à un enfant de penser à un ensemble caractérisé par la conjonction de deux attributs. Par exemple, il pourrait penser aux « triangles grands ». Tout « triangle grand » est donc un exemplaire, un membre de son ensemble, et toute pièce qui n'est pas un triangle grand n'est pas membre de cet ensemble, comme, par exemple, les triangles petits ou bien toutes les grandes pièces qui ne sont pas des triangles. Deux ou trois enfants, à tour de rôle, pourraient montrer les pièces et demander à l'enfant qui a été choisi pour penser à un ensemble : « Cette pièce-là fait-elle partie de ton ensemble ? ». Si c'est « oui », on pourrait placer un jeton vert sur la pièce, si c'est « non », on pourrait placer un jeton rouge. Le premier enfant qui, ou bien nommera l'ensemble par ses attributs, ou bien ramassera toutes les pièces de l'ensemble à la fois (non les autres !) sera le gagnant et c'est lui qui sera chargé de choisir l'ensemble suivant.

Au commencement, les enfants chercheront de façon incohérente à deviner sans tenir compte de l'information obtenue par les jetons verts et rouges qui auront été placés sur les pièces. Pour aider les enfants à mieux aborder la difficulté, le maître pourrait éventuellement leur dire : « Vous n'avez guère de chance avec ce jeu, n'est-ce pas ? » Bien entendu l'enfant qui devinera l'ensemble avec le plus petit nombre de questions sera le « champion », et les autres essaieront de faire mieux si, toutefois, il est possible de deviner l'ensemble nouveau avec un aussi petit nombre de questions.

Il ne faut pas s'attendre à voir naître des stratégies très compliquées dans les débuts. Mais, après une pratique suffisante, les enfants sauront mieux faire usage de l'information. Par exemple : Si un triangle grand jaune mince est une pièce « oui » il sera d'une bonne stratégie de changer un seul attribut à la fois et de montrer un triangle grand rouge mince. Si c'est une pièce « non », c'est donc le jaune qui fait la différence et l'attribut « jaune » doit faire partie de l'ensemble à deviner. Si, par contre, c'était une pièce « oui », alors la couleur ne pourrait pas faire la différence et l'on pourrait en déduire que la couleur n'entre pas dans la définition de l'ensemble... mais, comme nous venons de le

1. Ce jeu est dû à Jérôme Bruner. Voir *A study of thinking*, Bruner, Goodnow and Austin, Wiley, New York, 1956. Bruner utilisait des cartes et des sujets adultes.

dire, on ne peut s'attendre à une telle rigueur au départ, bien qu'il y ait des enfants qui en soient capables.

Par contre, ce qui est tout à fait certain, c'est que les enfants ne tireraient aucun bénéfice d'exercices de ce genre si le maître leur enseignait à les résoudre de cette manière. Le but de tels jeux n'est pas, en effet, de montrer comment il faut en trouver la solution, mais, notons-le, la nécessité pendant qu'on apprend à y jouer d'une certaine somme de réflexion personnelle, et les jeux sont proposés justement aux enfants pour leur donner une chance d'acquérir une telle réflexion personnelle ; leur dire comment jouer les priverait de cet avantage et rendrait les jeux sans valeur éducative.

7. LE JEU DES TABLEAUX OU MATRICES

On demande aux enfants de mettre en ordre l'ensemble des blocs. Cette formule est, à dessein, très vague et les enfants feront quelquefois un vague essai de mettre les pièces en ordre. Les instructions peuvent être plus précises, si on leur dit : « Mettez toutes les pièces grandes ici, et toutes les petites, là. Nous commencerons avec les carrés et puis nous continuerons avec les rectangles, puis avec les ronds et puis avec les triangles » ; mais il serait préférable, évidemment, de laisser les enfants prendre ces décisions eux-mêmes.

Il se peut que 48 pièces soient un nombre un peu trop grand pour un arrangement convenable dans une matrice. Si l'on sélectionnait, de façon systématique, un petit nombre de pièces et si l'on demandait aux enfants de les ranger, l'idée de le faire suivant un certain ordre pourrait leur venir à l'esprit plus facilement. Si on ne leur donnait que les pièces grandes et épaisses, il n'y en aurait que 12 comprenant 3 couleurs et 4 formes. On n'attendrait pas longtemps avant que les enfants les ordonnent en 3 rangées de 4 pièces chacune et chaque rangée contiendrait les pièces de la même couleur et probablement dans le même ordre. Il y aurait une rangée rouge, une bleue et une jaune et, probablement, une colonne avec des carrés, une avec des triangles, une avec des rectangles et une colonne avec des ronds. Ayant présenté ceci comme une des mises en ordre possible, alors le classement de toutes les pièces de la boîte dans un tableau deviendrait très facile. La méthode de classement ayant été choisie et définie, on peut commencer une partie en posant seulement un certain nombre de pièces, c'est-à-dire en remplissant une certaine partie de la table et en demandant aux enfants de continuer à disposer le reste selon les règles comme ils l'ont vu faire pour les pièces déjà posées. Évidemment, ils peuvent le faire à tour de rôle et de façon compétitive. Un enfant ou une équipe peut penser à une règle et l'appliquer en plaçant seulement quelques pièces. L'autre équipe peut alors essayer de retrouver cette règle en posant d'autres pièces à la suite. Les pièces mal placées peuvent être contestées par l'équipe adverse et des points ajoutés ou retranchés selon le cas. Si une règle qui est différente de celle choisie par la première

équipe est realisée par la seconde, on laissera continuer les enfants aussi longtemps que cette règle différente restera en accord avec les positions des pièces déjà posées.

Si l'on voulait jouer d'une manière qui relève à la fois du jeu de domino et du jeu des tableaux, on pourrait dire aux enfants de faire varier, dans une rangée, l'épaisseur d'une pièce à l'autre tout en gardant la même grandeur. Les instructions pourraient être : « Mettez seulement les grandes pièces dans cette rangée, mais dans l'ordre : épaisse, mince, épaisse, mince, etc... Puis on pourrait leur demander de faire une rangée parallèle avec, cette fois, seulement des petites pièces, de la même façon : épaisse, mince, épaisse, mince etc... On devra dire aux enfants que, dans cette partie, les couleurs et les formes n'ont pas d'importance mais seulement l'épaisseur et la grandeur. Finalement un tableau comme ci-dessous en résulterait :

épais grand,	mince grand,	épais grand,	mince grand,	épais grand,	mince grand
épais petit,	mince petit,	épais petit,	mince petit,	épais petit,	mince petit
épais grand,	mince grand,	épais grand,	mince grand,	épais grand,	mince grand
épais petit,	mince petit,	épais petit,	mince petit,	épais petit,	mince petit
etc...					

Dans la direction de gauche à droite la grandeur reste la même tandis que l'épaisseur varie alternativement. Dans la direction d'avant en arrière, l'épaisseur reste la même tandis que la grandeur change alternativement. On n'attendra pas longtemps avant que des enfants s'exclament : « Oui, et si vous jouez aux quatre coins, alors vous changez l'épais en mince ou le grand en petit ».

Ce jeu est une introduction aux jeux de transformations de même que dans les « promenades » en trois directions différentes nous engendrions :

1) des changements de grandeur ;
2) des changements d'épaisseur ;
3) des changements de grandeur et d'épaisseur.

Il permet de familiariser les enfants avec l'idée que certaines choses sont applicables à certains moments et non à d'autres. Dans les jeux envisagés jusqu'à présent, les couleurs et les formes ont toujours été utilisées. Ici, elles sont inutilisables.

8. LES JEUX AVEC DES CERCEAUX[1] (diagrammes de Venn)

8.1. *Le jeu avec deux cerceaux*

Deux cerceaux de bois peuvent être posés sur le plancher de façon à se recouvrir en partie.

1. Dans les classes maternelles qui disposent de cerceaux, il est pratique de s'en servir. Au C. P., nous avons pris des cerceaux de gymnastique. Mais on peut toujours dessiner des cercles ou se servir de cordes.

On pourra dire aux enfants – par exemple – que toutes les pièces rouges doivent être mises à l'intérieur d'un cerceau particulier et qu'aucune pièce rouge ne devra être laissée à l'extérieur. A l'intérieur de l'autre cerceau, on pourra poser tous les rectangles et aucun rectangle ne devra être posé à l'extérieur. Au début, les enfants pourront prendre tout le temps de décider ce qu'il faut faire avec les rectangles rouges. Ceux-ci iront naturellement sur la partie du plancher où les cerceaux se recouvrent, parce qu'elle est à la fois à l'intérieur du cerceau « rouge » et à l'intérieur du cerceau « rectangle ». Les pièces qui ne sont ni rouges ni rectangles doivent être placées en dehors. Cela signifie que les 48 pièces auront été partagées en 4 groupes : les rectangles rouges, les rouges non-rectangles, les rectangles non-rouges et celles qui sont non-rouges et non-rectangles.

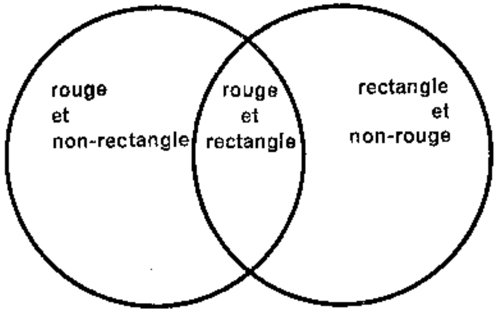


Fig. 4

Ainsi le premier exercice aura été fait avec des ensembles dont les rapports sont exprimés par « **et** » et « **non** ».

Il faut également jouer ainsi avec des enfants de la classe. On peut employer une corde qui entourera les enfants possédant certains attributs. Par exemple, nous pourrions prendre les enfants qui ont des chaussures noires et les inviter à entrer tous dans la boucle de corde. Nous pourrions dire que tous les enfants aux cheveux blonds doivent entrer dans une autre boucle. Il peut se passer un bon moment avant que les enfants aux cheveux blonds à qui il arrive ce jour là de porter des chaussures noires comprennent où ils doivent aller. Il y a souvent toute une discussion au sujet de ce que doivent faire de tels enfants. Ceux qui portent des chaussures noires veulent aller avec ceux qui portent des chaussures noires et ceux qui ont des cheveux blonds veulent aller avec ceux qui ont des cheveux blonds. Finalement, on leur fera découvrir que les deux cordes peuvent être mises dans une position telle qu'elles se recouvrent en partie, auquel cas les enfants aux cheveux blonds et qui portent des chaussures noires peuvent se

tenir dans la partie commune aux deux boucles. Ils seront à l'intérieur des deux boucles en même temps. Ce jeu peut aisément être étendu à un jeu avec trois cerceaux (ou trois boucles).

8.2. *Le jeu avec trois cerceaux*

Pour cela, trois cerceaux doivent être posés sur le plancher, de manière à ce qu'ils se recouvrent chacun en partie. On attribuera à chaque cerceau un certain attribut. A l'un ce sera peut-être une couleur, à l'autre une forme, et au troisième une épaisseur ou une grandeur – soit par exemple au premier cerceau l'attribut « bleu », au second l'attribut « carré », et au troisième l'attribut « grand ». On expliquera qu'à l'intérieur du premier cerceau doivent aller toutes les pièces bleues et les pièces bleues seulement, et qu'aucune pièce bleue ne doit aller à l'extérieur. Le deuxième cerceau devra contenir toutes les pièces carrées, rien que les pièces carrées et l'on ne devra poser aucune pièce carrée à l'extérieur. Le troisième cerceau devra contenir toutes les pièces grandes, rien que les grandes et aucune pièce grande ne devra rester à l'extérieur. On aura remarqué que cette disposition partage les 48 pièces en 8 sections qui sont les bleus non-carrés non-grands, les carrés non-bleus non-grands, les carrés bleus grands, les carrés bleus non-grands, les carrés non-bleus grands, les non-carrés bleus grands, les grands non-carrés non-bleus et les non-grands non-carrés non-bleus – ces derniers étant laissés à l'extérieur (voir figure 5).

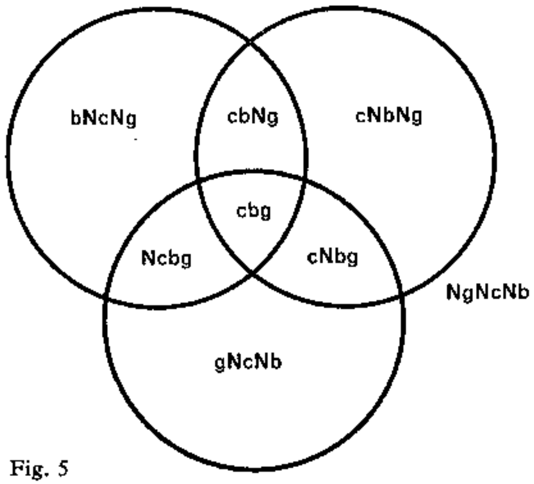


Fig. 5

La construction d'un tel diagramme par des enfants semble peut-être incroyable. Nous l'avons vu réalisé par des enfants de 4 ans, pratiquement sans erreur, après seulement quelques instructions.

Plus tard, ce jeu peut être étendu à d'autres attributs, à d'autres objets ou à des personnes dans la salle de classe afin que les relations logiques apprises dans les jeux avec les blocs logiques puissent être facilement transférables à d'autres situations, par exemple à des attributs de personnes, et éventuellement de nombres, ou d'ensembles de nombres, etc. On peut donner des points pour les pièces placées correctement et encourager l'esprit d'émulation comme dans les autres jeux.

On peut aussi jouer avec 4 attributs. Il faut cependant dire aux maîtres qu'il est très difficile de dessiner quatre cercles de manière à ce que toutes les 16 combinaisons des intérieurs et des extérieurs de ces cercles soient représentées par une région assez spacieuse ; autrement dit, si l'on veut jouer avec quatre attributs, des cordes assez longues seront nécessaires pour que chaque combinaison des 4 attributs et de leurs négations aient une « maison » dans laquelle les pièces puissent être placées correctement. On peut, bien entendu, dessiner des ellipses sur le sol avec une craie[1].

Le jeu à 4 attributs est beaucoup plus difficile que le jeu à 3 attributs et l'on ne peut invoquer aucun but éducatif particulier pour proposer aux enfants d'apprendre à combiner complètement 4 attributs et leurs négations. Si, cependant, les enfants désirent vivement exercer leur habileté intellectuelle dans cette direction, ils ne faut pas les décourager.

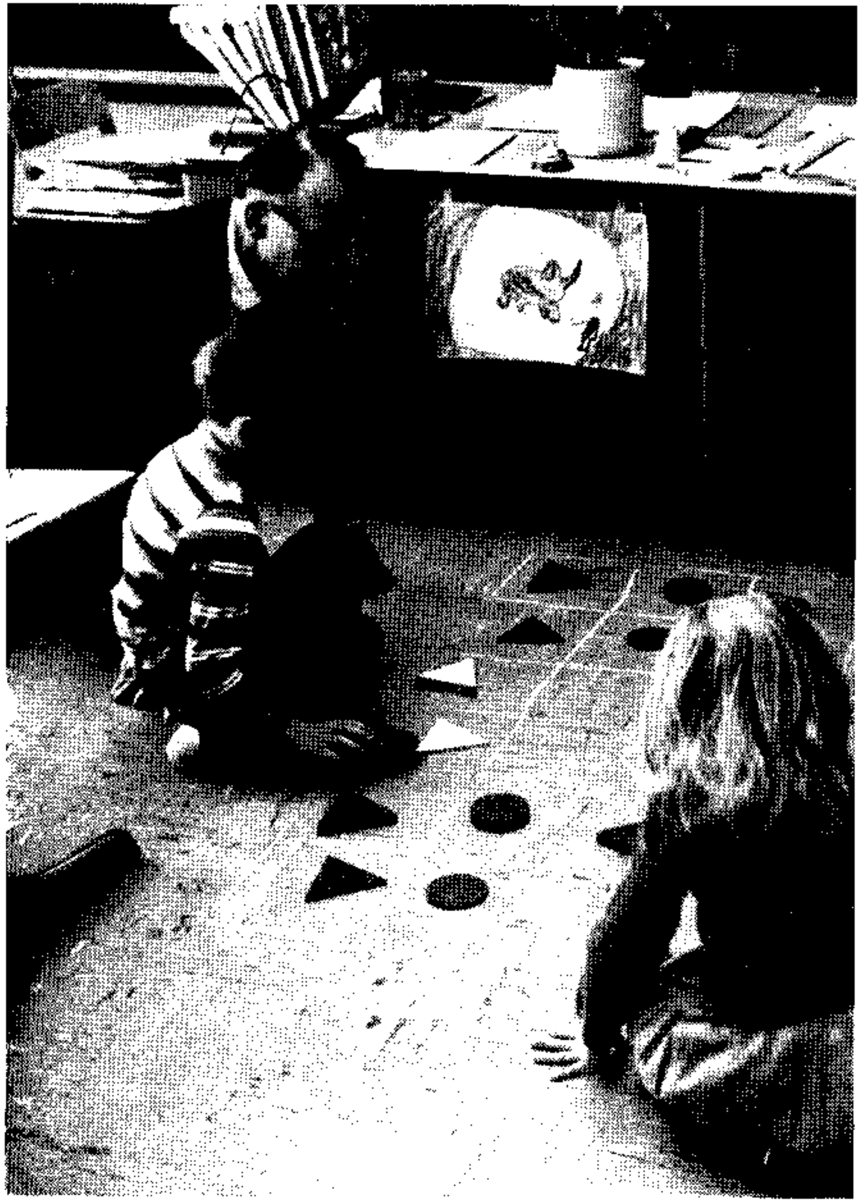
9. LES JEUX DE « OU... OU »

9.1 *Première version*

On peut y jouer en demandant aux enfants de faire un ensemble dans lequel chaque pièce est, ou une sorte de chose, ou une autre sorte de chose; par exemple, nous pourrions apprendre aux enfants à mettre dans un panier toute pièce qui est *ou* un carré *ou* qui est jaune. Si elle est carrée, elle peut aller dans le panier, si elle est jaune, de même. Cela signifie que si c'est un carré jaune, il peut naturellement aller encore dans le panier. Quand chaque pièce qui doit aller dans le panier a bien été mise dedans, il est vrai de dire que quelle que soit la pièce qu'on retirera du panier, elle sera ou un carré ou jaune. Ainsi le contenu du panier représentera un ensemble tel que chacun de ses éléments aura l'attribut *ou jaune ou carré*.

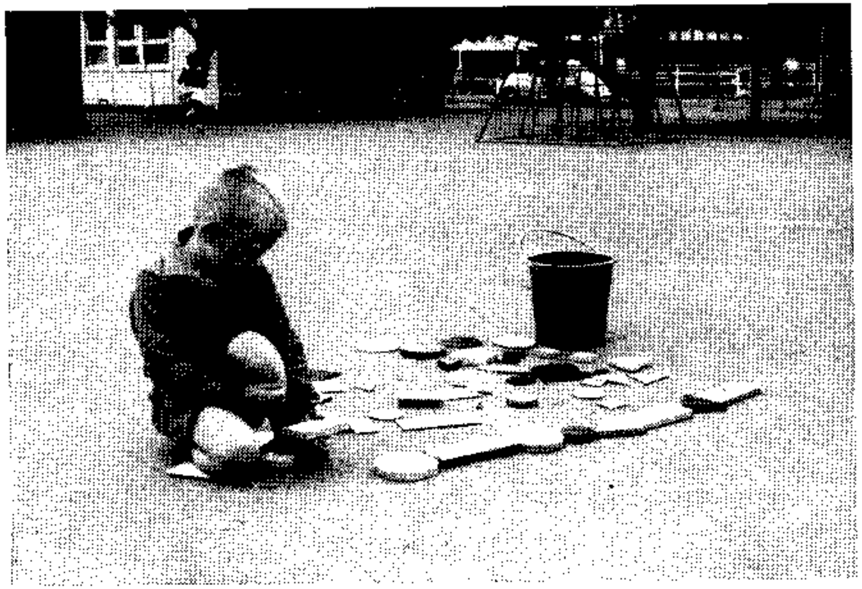
Une pièce qui est un carré est, naturellement, ou bien carrée ou bien jaune. Cela semble au premier abord un peu compliqué à comprendre pour des enfants mais peut-être que des pièces peuvent être sorties du panier et cachées et que l'on peut demander : « Est-elle un carré ou est-elle jaune? » Ils en conviendront volontiers.

1. G. Papy dessine des figures qu'il appelle « patates », elles sont sans doute très pratiques et à recommander (N.D.E).



On range les blocs : jeu du tableau

Diagramme de Venn à trois attributs



Entre deux blocs, il y a toujours deux différences

Alors, ils pourront regarder la pièce et voir si elle est carrée, ou jaune, ou les deux à la fois. Alors on insistera : « Est-ce vrai que la pièce que je tiens est carrée ou jaune ? » Ils diront, sans se faire prier, qu'il en est bien ainsi et, en fait, quand ils l'auront devant les yeux, ils vérifieront qu'elle possède l'un ou l'autre attribut, ou les deux à la fois.

Dans la seconde partie du jeu, on pourrait demander aux enfants de sortir du panier une pièce qui n'est pas jaune. Évidemment, toute pièce qui n'est pas jaune est obligatoirement un carré. Toutes les pièces non jaunes seront retirées et les enfants seront surpris de trouver qu'elles sont toutes carrées. Ainsi les pièces du panier ont l'attribut « si non jaune, alors carré » Celles-ci peuvent alors être remises dans le panier et on peut demander aux enfants de prendre les pièces qui ne sont pas carrées. Ils verront bientôt que toutes les pièces qui ne sont pas carrées sont jaunes. Ainsi, toutes les pièces qui sont dans le panier ont la propriété : « Si non-carré, alors jaune ». Ceci est encore une autre déduction que les enfants auront faite d'un énoncé « ou... ou », prolongeant ainsi les déductions rudimentaires faites quand ils jouaient au Jeu de Négation. Cela signifie que si une situation « ou... ou » est proposée, alors une situation d'implication peut en être déduite. La situation « ou... ou » ici, est que chaque chose qui est dans le panier est « ou un carré ou jaune ».

Les situations d'implication sont « si non-jaune, alors carré » « si non-carré, alors jaune ». Ces implications *sont déduites* de la situation « ou bien... ou bien ». Les implications elles-mêmes sont les propriétés des ensembles dans le panier et la déduction n'est pas elle-même une implication. Nous avons *déduit* une implication d'un attribut « ou... ou » C'est la première fois que sera faite une distinction entre une *déduction* et une *implication.*

Il sera intéressant de regarder les pièces qui ne sont pas dans le panier. Ces pièces sont, à la fois, non-jaunes **et** non-carrées parce que toutes les pièces jaunes aussi bien que toutes les pièces carrées ont été mises dans le panier ; celles qui ne sont pas dans le panier sont « non-jaunes **et** non-carrées ». Ainsi, l'ensemble qui a été laissé hors du panier est un ensemble « **et** ». Ces pièces qui ne sont pas dans le panier ont l'attribut « ou non-carré ou non-jaune » qui est le même attribut que « à la fois non-carré et non-jaune ». Nous avons de nouveau ici *déduit* un attribut d'un autre attribut. Cet attribut est la négation de l'attribut « ou... ou » et nous voyons que cette négation est un attribut « **et** » des négations des attributs constituants de l'attribut « ou... ou ». Le « non » d'un énoncé « ou... ou » est le « et » des négations des énoncés qui constituent le « ou... ou ; « ou Non-carré ou Non-jaune » est la même chose que « non-carré *ET* non-jaune ».

On peut maintenant compliquer un peu plus en construisant un ensemble « ou... ou » dans lequel il y a déjà des attributs de négation. Nous pourrions dire que nous désirons que quelqu'un mette dans le panier des pièces qui soient « ou bleues ou non-triangles ». Toute chose bleue peut aller dans le panier ou toute chose qui n'est pas triangle. Cela signifie que si nous enlevons du panier un triangle, il sera nécessairement bleu, et si nous enlevons une pièce qui n'est pas bleue, elle sera nécessairement un non-triangle. Ici encore nous avons déduit des implications à partir des attributs « ou... ou » et appris, de façon plus générale, à trouver notre chemin dans le calcul propositionnel.

9.2. *Version compétitive*

Le jeu ci-dessus peut être rendu compétitif de la même manière que les autres en demandant aux enfants de placer les pièces, l'une après l'autre, dans le panier. De nouveau, chaque joueur a le droit de critiquer le joueur précédent et de prétendre que telle pièce n'aurait pas dû être mise dans le panier.

Quand le panier a été correctement rempli, on peut décider que les enfants devront poser certaines questions ou donner certains ordres qui impliquent certains attributs qui n'étaient pas inclus dans l'ordre. Par exemple, à propos du panier qui contient des pièces qui sont « ou bleues ou non-triangles », est-il possible de formuler un ordre tel que « Retire du panier une pièce qui est telle et telle » de manière à être certain que celle qui va être sortie ait un certain autre attribut qui n'est pas inclus dans l'ordre ? Il y a, évidemment, deux manières de faire ceci dans le cas d'un ensemble « ou... ou ». Dans le cas où toute pièce est « ou bleue ou non-triangle » si on demande un triangle, alors il sera bleu. Si on demande une pièce non-bleue, alors ce sera une pièce non-triangle. Si par contre on demande une pièce bleue, elle ne sera pas nécessairement un triangle, elle pourra être un non-triangle.

Il y a deux manières de demander à quelqu'un de retirer des pièces d'un ensemble « ou... ou » pour qu'il en résulte qu'un attribut non inclus dans la demande définisse les pièces retirées. Pour de tels ordres, nous pouvons choisir, à partir de deux attributs bleu et triangle et de leurs négations, parmi les quatre ordres qui peuvent en découler : 1) un bleu, 2) un non-bleu, 3) un triangle, 4) un non-triangle.

Deux de ces demandes réussiront et deux ne réussiront pas, c'est-à-dire deux d'entre elles impliqueront certains autres attributs et les deux autres non. C'est ainsi que la demande « Retirez un triangle » signifiera qu'on aura retiré un triangle qui sera nécessairement bleu, mais l'ordre, « Retirez un non-triangle » signifiera que l'on retirera, certes, un non-triangle, mais qui sera soit bleu soit non-bleu.

Les ordres qui donneront des points pourront être, par exemple ceux qui impliqueront inévitablement un certain attribut non-inclus dans la question[1]. Ceci aiguisera le raisonnement des enfants et permettra grâce aux manipulations qui accompagnent toujours ces

1. Ici l'ordre « Retirez un triangle » parce qu'il donnera un triangle nécessairement bleu : si triangle alors bleu.

exercices la formation de relations entre les attributs « ou... ou » et les attributs « si... alors ».

Pour rendre ce jeu plus difficile, il serait possible de commencer par un ensemble rouge *et* carré et de continuer avec le complément de cet ensemble qui est « ou non-rouge ou non-carré ». Dans ce dernier ensemble il y a ou bien des pièces non-rouges ou bien des pièces non-carrées. Nous pouvons demander, par exemple, « Retirez une pièce rouge », et alors, naturellement, ce serait une pièce non-carrée. Ou, nous pouvons aussi dire : « Retirez une pièce carrée », et, alors évidemment, ce sera aussi une pièce non-rouge.

Le jeu peut être rendu encore plus difficile en allant dans la direction inverse et en partant d'un ensemble « et » au lieu de partir de l'ensemble « ou... ou » lui-même. On se rappellera que tout ensemble « et » a un ensemble complémentaire « ou... ou » et tout ensemble « ou... ou » a un ensemble complémentaire « et ». Ces règles logiques sont habituellement appelées règles de De Morgan, d'après le mathématicien de ce nom. On pourrait jouer à des jeux dont le but serait l'apprentissage des relations de De Morgan.

Les jeux de « ou... ou » et de « si... alors » peuvent être pratiqués en se servant de situations définies verbalement. Quand les enfants ont suffisamment de pratique des blocs, ils deviennent capables d'appliquer les relations ainsi apprises à d'autres situations, On peut leur demander de penser à des situations « si... alors » qu'ils appliqueront eux-mêmes sans erreur.

Un enfant pourrait dire: « S'il pleut, notre garage est inondé ». Nous pouvons suggérer à l'enfant : le garage était inondé un matin, pouvons nous dire quelque chose concernant la pluie ce matin-là ? Si l'enfant dit « oui, il a plu », il a besoin d'une pratique supplémentaire des situations concrètes « si... alors ». Par contre, s'il dit : « Le voisin avait arrosé le garage » ou quelque chose semblable, nous saurons qu'il a compris la non-inévitabilité des situations « si... alors ».

D'autre part, si nous suggérons que le garage n'était pas inondé, alors il ne peut pas avoir plu, parce que nous savons que s'il avait plu, alors le garage aurait été inondé.

Le développement plus poussé d'un tel raisonnement formel est laissé au stade suivant de l'éducation primaire.

9.3. *Ensemble COMPLÉMENTAIRE d'un ENSEMBLE « ou... ou »*

Prenons un ensemble « ou... ou », par exemple :

« ou rouge ou rond ».

Entreraient dans cet ensemble toutes les pièces qui sont rouges ainsi que toutes les pièces qui sont rondes. De cette manière l'attribut être « ou rouge ou rond » serait représenté physiquement par l'ensemble composé de ces objets. Demandons-nous maintenant quels objets sont dans l'ensemble complémentaire? Ce sont les pièces qui ne sont ni rouges ni rondes. Ou, d'une autre façon, l'ensemble complémentaire contient les pièces qui sont « à la fois non-rouges, et non-rondes ».

On pourrait demander aux enfants de faire l'ensemble « ou rouge ou rond » et, alors, voir comment ils pourraient décrire l'ensemble des blocs qui ont été laissés à l'extérieur de l'ensemble « rouge ou rond ». On pourrait leur poser une question comme : « Que pouvons-nous dire concernant tout élément de l'ensemble des blocs qui ne sont pas dans l'ensemble « rouge ou rond »? Les enfants découvriraient que tout élément de l'ensemble complémentaire n'est pas rouge. Ils découvriraient aussi que tout élément de l'ensemble complémentaire n'est pas rond. C'est pourquoi tout élément de l'ensemble complémentaire est « à la fois non-rouge et non-rond ».

D'autres ensembles « ou... ou » peuvent être réalisés et les ensembles complémentaires examinés. Le premier enfant qui peut énoncer ce que nous pouvons dire « à la fois » des éléments de l'ensemble complémentaire est le gagnant. C'est lui qui proposera un autre ensemble « ou... ou ». De cette façon, les enfants se rendront bien compte que l'ensemble complémentaire d'un ensemble « ou... ou » est un ensemble « et ». Quelques brillants élèves réussiront à trouver que les négations des propriétés définissant l'ensemble « ou... ou » doivent être transformées en ensemble « et » pour définir l'ensemble complémentaire.

Ceci est une des règles de De Morgan. S'il est clairement compris que la négation d'une négation est l'attribut d'origine, alors on ne rencontrera aucune difficulté avec les ensembles complémentaires des ensembles « ou... ou » tels que « ou jaune ou non-triangle », « ou non-bleu ou non-carré », etc.

9.4. *Ensemble COMPLÉMENTAIRE d'un ENSEMBLE « et »*

Considérons un ensemble « et », par exemple, « bleu et carré ». Quel est l'ensemble complémentaire de cet ensemble?

Cet ensemble comprendra des blocs qui sont ou non-bleus ou non-carrés. On peut poser la question : « Quelle sorte de pièces y a-t-il dans l'ensemble complémentaire? » Si l'enfant ne répond pas, on peut l'aider en demandant « toute pièce est...? » en s'arrêtant net avant le petit mot « ou », mais en le suggérant, si c'est nécessaire. Ainsi il sera bien compris que la propriété possédée par l'ensemble complémentaire d'un ensemble « et » peut s'exprimer par les négations de « ou... ou » des propriétés déterminées de l'ensemble originel. En d'autres termes, dire « non-bleu *et* non-carré » est la même chose que de dire « *ou* non bleu *ou* non carré ».

L'exercice peut être transformé en jeu de la même manière que le précédent.

10.1. *Le jeu de reproduction ou copie*

Il se joue avec deux équipes qui se font face, chacune disposant d'une boîte complète de blocs logiques. On doit bien prendre soin de ne pas mélanger les deux ensembles de blocs et de vérifier qu'aucune pièce ne manque dans l'un et l'autre.

La première sorte de reproduction sera évidemment une forme de reproduction identique, ou autrement dit copie : une équipe fera une certaine sorte de construction, n'importe laquelle, avec les blocs, et l'autre équipe devra la reproduire exactement, c'est à dire, la copier.

Certains enfants de cinq ans et même de six ans trouvent cela vraiment très difficile. Il est prudent de limiter à 5 ou 6 le nombre de pièces de la première construction. Si un modèle est fait par une équipe, la copie exacte par l'équipe qui se trouve en face présentera quelque difficulté. Pour aider les enfants dans cet exercice, il faut qu'ils puissent se concentrer sur les relations spatiales entre les pièces. Il en résultera alors un apprentissage important. Dès que les enfants savent reproduire une construction avec précision, on peut compliquer l'exercice ; par exemple, on pourrait décider que la même construction doit être faite, mais chaque fois qu'une pièce bleue sera posée d'un côté, une pièce rouge (mais de la même forme, de la même grandeur et de la même épaisseur) devra être posée en face ; et, pareillement, si une pièce rouge a été posée d'un côté, alors une pièce bleue (mais de la même forme, de la même grandeur et de la même épaisseur) devra être posée de l'autre. D'autre part, à une pièce jaune qui est posée d'un côté devra correspondre une pièce jaune de l'autre. Ainsi la structure sera reproduite exactement à la différence des pièces bleues et des pièces rouges qui seront interverties. La reproduction pourrait, évidemment, être faite d'une manière différente, en choisissant une autre combinaison de couleur. Bientôt les enfants commenceront à penser à un changement de couleur cyclique, par exemple : chaque bleu d'un côté pourrait être remplacé de l'autre côté par la même pièce mais rouge, chaque rouge par la même pièce mais jaune et chaque jaune par la même pièce mais bleue, etc...

Il y a bien d'autres jeux de reproduction possibles, par exemple, chaque pièce grande d'un côté peut-être remplacée par une petite, chaque petite par une grande, ou chaque épaisse par une mince, chaque mince par une épaisse ou bien l'on peut faire à la fois deux de ces changements d'attributs en même temps, etc.

Le jeu peut-être compliqué autant que les enfants le désirent et peut devenir très compétitif. C'est une introduction importante à l'idée de *transformation* qui peut même conduire les enfants à la découverte de quelques-unes des propriétés des groupes mathématiques.

Si trois équipes jouent au jeu de reproduction, ce sera, dans ce cas, avec trois ensembles de blocs logiques. Alors A peut construire l'édifice, B peut le reproduire suivant une certaine règle, puis C peut reproduire B suivant une autre règle. On peut demander aux enfants quelle est la règle qui permet de reproduire A en C. Cet exercice les fera entrer dans le domaine de la théorie des transformations. Naturellement, les quatre formes peuvent être changées les unes en les autres, beaucoup de possibilités peuvent être essayées, par exemple les carrés peuvent être changés en triangles, et les ronds en rectangles ; quatre combinaisons cycliques peuvent aussi être essayées, etc...

10.2. *Développement du jeu de reproduction*

On voit clairement que le jeu de reproduction contient les germes d'une activité mathématique très avancée. L'idée de transformation, ou fonction qui crée une situation à partir d'une autre situation, est incluse dans ces jeux. En outre, la combinaison de telles transformations y est aussi incluse comme, par exemple, si le groupe A est reproduit en B d'une certaine manière, et B en C d'une autre manière, la question se pose de savoir comment le groupe A a été transformé en C. C'est la combinaison des deux reproductions.

Peut-être qu'à ce stade, au lieu du mot reproduction, nous pourrions commencer à employer le mot « transformation » ; pas encore avec les enfants, mais dans la description des jeux.

Prenons, par exemple, la transformation qui change le bleu en rouge et le rouge en bleu et laisse le jaune inchangé, et l'autre transformation qui reproduit tout exactement. Clairement, si nous continuons à faire l'une ou l'autre de ces transformations, et peut-être l'une d'entre elles plusieurs fois de suite, puis l'autre plusieurs fois de suite etc... nous aurons ainsi exécuté plusieurs fois une succession de transformations telles que le tout dernier édifice peut aussi bien être obtenu à partir du premier par encore une et une seule de ces transformations. En effet, la reproduction « copie » simplement, c'est-à-dire que les couleurs restent exactement les mêmes ; d'autre part, le changement bleu-rouge change simplement le bleu en rouge et le rouge en bleu, tout en laissant le jaune inchangé ; si bien que lorsque ce changement bleu-rouge aura été effectué deux fois nous serons revenus à la situation d'origine. Les enfants se rendront bien compte qu'une copie suivie par un changement bleu-rouge produira une transformation complète du bleu et du rouge ; et qu'un changement bleu ou rouge suivi par un autre changement bleu en rouge produira une transformation nouvelle qui équivaudra à copie ou, si l'on veut, une copie suivie par une double transformation sera, évidemment, équivalente à une simple copie. Il n'est, bien sûr, pas nécessaire de choisir un changement bleu en rouge en gardant le jaune inchangé. On peut choisir le changement rouge en jaune en laissant le bleu inchangé, le changement bleu en jaune en gardant le rouge inchangé. Il est clair qu'il n'y a que les trois manières décrites ci-dessus de faire les transformations de couleur.

10.3. *Jeux cycliques et inverses*

Il y a naturellement, des transformations cycliques, par exemple, le rouge peut-être transformé en bleu, le bleu en jaune, le jaune en rouge dans la transformation d'un édifice en un second édifice.

Si nous transformons alors ce second édifice en un troisième édifice par le changement, cette fois, de toute pièce rouge du second en pièce bleue dans le troisième comme de toute pièce bleue en pièce jaune et de toute pièce jaune en pièce rouge dans le troisième, quelle transformation avons-nous réalisée lorsque nous sommes passés du premier édifice au troisième ?

Il ne s'agit plus maintenant de « transformation-copie », autrement dit, le troisième édifice n'a pas, pour chacune de ses formes, les mêmes couleurs que le premier.

On peut constater, en effet, que les pièces jaunes du premier ont été changées en pièces bleues dans le troisième et, de même, les pièces bleues en pièces rouges et les pièces rouges en pièces jaunes dans le troisième.

La transformation de l'édifice 1 en édifice 3 est exactement l'opposée de la transformation de l'édifice 1 en édifice 2. Cela signifie que si nous appliquons à l'édifice 2 la transformation 1→3 qui permet de passer directement de l'édifice 1 à l'édifice 3, nous obtiendrons la copie de l'édifice 1.

En effet, dans la transformation 1 → 3, le rouge devient jaune, le bleu devient rouge, et le jaune devient bleu.

Si nous l'appliquons à l'édifice 2 cela donnera : le bleu deviendra rouge, le jaune bleu et le rouge jaune ; où l'on voit clairement qu'on est revenu à l'édifice 1 de départ [1].

Un couple de telles transformations qui lorsqu'on les applique l'une après l'autre produisent la « transformation-copie » sont appelées inverses l'une de l'autre. Les mathématiques abondent en inverses. La pratique des opérations inverses est la clé de la compréhension des relations entre les opérations telles que l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, les puissances, les racines, les logarithmes etc... Si les enfants rencontrent des transformations et leurs inverses de bonne heure, ils auront moins de difficulté à maîtriser les situations plus difficiles concernant l'addition et la soustraction, la multiplication et la division. Ayant rencontré les inverses, ces situations seront plus aisément comprises, en effet, les relations entre les inverses et les transformations directes seront pour eux de vieilles amies.

1. *En résumé :*

édifice 1		édifice 2		édifice 3		retour à édifice 1 par transformation 1-3 appliquée à l'édifice 2
r	→	b	→	j	→	r
b	→	j	→	r	→	b
j	→	r	→	b	→	j