DANS LA MÊME COLLECTION :

I. *Logique et jeux logiques*
II. *Ensembles, nombres et puissances*

À PARAÎTRE :

Les fractions (avec fiches de travail)
La géométrie des transformations (avec fiches de travail)
Algèbre linéaire (avec fiches de travail)

Les premiers pas en mathématique

III

EXPLORATION DE L'ESPACE ET PRATIQUE DE LA MESURE

par
Z. P. DIENES et E. W. GOLDING

O. C. D. L.
65, RUE CLAUDE-BERNARD – PARIS 5e

Le texte original de cette initiation à la mathématique a été publié sous le titre *First years in mathematics: Exploration of space and practical measurement*, par O. C. D. L. pour ESA Harlow (Essex), Grande-Bretagne, et Herder and Herder, New York.
Le texte anglais a été traduit et adapté par J. Confida.

Première partie

L'EXPLORATION DE L'ESPACE

1. IDÉES FONDAMENTALES

La géométrie est l'exploration de l'espace. Un enfant, dès sa naissance, explore l'espace. D'abord, il le regarde, puis il y étend ses membres, à la découverte, puis il s'y déplace. Il lui faut un temps assez long pour développer les idées de perspective, de distance, de profondeur, des notions comme celles de *dedans* et *dehors*, *devant* et *derrière*, *avant* et *après*, et ainsi de suite. Quand l'enfant arrive à l'école, certains de ces développements sont déjà en bonne voie : il faut les encourager et les étendre en multipliant les expériences offertes aux enfants. Mais auparavant la maîtresse devra s'efforcer de découvrir le point auquel chaque enfant, pris individuellement, est parvenu, les concepts qui se sont déjà formés. Il se trouve, par bonheur, que ce sont les leçons mêmes destinées à aider l'enseignant dans cette découverte qui peuvent être utilisées pour aider les enfants les moins expérimentés dans leur formation conceptuelle. En tout cas, rappelons-nous toujours que les concepts ne s'enseignent pas – tout ce qu'on peut faire, c'est de créer, de présenter les situations et les expériences qui aideront les enfants à les former. A l'école maternelle, c'est surtout à la formation des concepts qu'il faut consacrer l'enseignement, bien plus qu'à l'acquisition des faits.

Les toutes premières notions de géométrie n'ont rien à voir avec la mesure. Un enfant se soucie fort peu de la distance exacte des objets, ou de leurs déplacements, ou de l'angle sous lequel les choses se voient. Tout cela, il le remarque, en quelque sorte, implicitement. Ce qui l'intéresse surtout, c'est de se procurer les choses – de se déplacer dans l'espace pour faire ce qu'il désire. Ce qui compte, c'est que s'il y a certaines choses, par exemple des bonbons, dans une boîte, il faut ouvrir cette boîte pour pouvoir les prendre. C'est donc une découverte importante pour lui qu'il y ait des boîtes ouvertes et d'autres qui ont un couvercle. Les portes sont parfois ouvertes, parfois fermées, et il s'aperçoit qu'il ne peut ni entrer dans une pièce ni en sortir autrement que par une porte – ou une fenêtre – ouverte. Aussi l'idée de « trou », de « passage » est-elle de celles qui comptent!

Parmi les autres idées du même ordre, il y a celle de l'envers des choses. Même tout bébé, on le voit s'intéresser à ce qu'il y a de l'autre côté de la porte ouverte et, plus tard, quand il a fini de dessiner d'un côté de la feuille, il découvre qu'on peut la retourner et dessiner de l'autre côté aussi. De même, il s'intéresse au dedans et au dehors, aux trous, à l'avant et à l'arrière; et ainsi de suite. C'est par ces notions, qu'on qualifie en géométrie de « topologiques », qu'il faut débuter ici.

2. TOPOLOGIE

La topologie est l'étude des propriétés de l'espace qui ne sont pas affectées par une déformation continue. Par conséquent, si on veut rester dans le cadre de la topologie, on a le droit d'incurver ou de distendre les frontières, ou d'en changer la forme à volonté, mais on ne peut ni les déchirer ni les casser, ni faire un trou dans la surface.

Considérons, par exemple, un ballon gonflé – on peut le gonfler davantage ou laisser échapper de l'air. Ce faisant, on demeure dans les limites de la topologie. Tant que le trou demeure fermé, c'est encore un ballon avec de l'air dedans, et on peut s'en servir, tel qu'il est, pour jouer. Mais à partir du moment où on fait un trou dedans, même en desserrant la ficelle et en laissant l'air sortir, ce n'est plus un ballon – tout au moins pas un de ceux qu'on peut lancer en l'air pour jouer. Si on le gonfle mais qu'on n'attache pas la ficelle, il se propulse tout seul, par réaction. C'est un jeu très amusant pour les enfants, sinon pour les parents, qui trouvent que ce n'est pas sérieux, car il montre la différence qu'il y a entre une chose sans trou et la même avec un trou. La différence est importante : quand le ballon a un trou, c'est un avion à réaction ; quand il n'en a pas, c'est un simple ballon.

Une autre idée très importante au point de vue topologique, c'est celle de *frontière*. Quand un enfant a joué dans un jardin entouré d'une barrière, il sait qu'il ne peut pas en sortir sans passer par-dessus la barrière. C'est une expérience assez différente de celle qu'on acquiert dans une pièce munie d'une porte. On peut grimper par-dessus la barrière, sans même avoir à ouvrir le portillon, et se trouver dehors, alors que c'est impossible dans une chambre, car on ne peut passer ni par-dessus les murs ni par-dessus la porte.

La clôture du jardin, c'est une frontière enfermant un espace à deux dimensions, c'est-à-dire une surface, alors que les murs, le plancher, le plafond, la porte et la fenêtre sont les frontières d'un espace à trois dimensions. Les frontières d'un espace à trois dimensions sont elles-mêmes à deux dimensions : les parois, les sols, sont des surfaces planes (à deux dimensions), et pour enclore un espace à trois dimensions (volume), il faut des espaces à deux dimensions (surfaces). Mais pour enclore un espace à deux dimensions, comme le jardin, il suffit d'un espace à une seule dimension (par exemple, ce peut être une ligne plus ou moins courbe, tracée tout autour pour indiquer où ce jardin finit et où commencent les jardins voisins). Même s'il n'y a pas de clôture, il y a une frontière, et l'enfant sait bien, si on le lui a dit, qu'il est défendu de la franchir pour aller chez le voisin sans demander

la permission. Dans le jardin, il peut aller en avant, en arrière, de côté, etc., mais il ne peut pas flotter en l'air. Une fois qu'il serait en l'air, il ne serait plus dans le jardin.

Dans la chambre, par contre, il pourrait grimper, voire flotter en l'air, il serait encore dans la chambre. Pour sortir de la chambre, il lui faudrait passer à travers le mur, ou le plafond, ou par le trou constitué par la porte ou la fenêtre. Il y a une grande différence entre l'espace constitué par une chambre et celui que forme un jardin, et il y a une non moins grande différence entre les frontières de ces deux espaces.

On peut jouer à quelques jeux intéressants avec les frontières. Supposons qu'on ait affaire à un espace à deux dimensions : un jardin, une cour ; faisons comme s'il était tellement grand qu'on ne puisse en voir les frontières dans aucune direction, et traçons-lui des frontières de notre cru. Par exemple, disposons au hasard sur le sol un certain nombre de cerceaux de diamètres variés, en nous arrangeant pour qu'ils ne se touchent pas. On peut mettre certains petits cerceaux dans les grands. Puis, on dit aux enfants de se répartir comme ils l'entendent, certains en dehors de tout cerceau, d'autres dans un cerceau isolé, d'autres entre un petit et un grand cerceau. On demande alors à la classe s'il est possible, pour Pierre par exemple, d'aller voir Françoise sans traverser aucune « frontière ». Il faut refaire l'exercice plusieurs fois, avec des enfants différents : parfois c'est possible, parfois ce ne l'est pas.

La maîtresse suggérera, par exemple, que si on peut aller d'une partie de la pièce dans une autre sans passer par-dessus aucune frontière, c'est peut-être que les deux parties sont dans le même domaine. Si ce n'est pas possible, par contre, c'est que ces deux parties ne sont pas dans le même domaine. On peut d'ailleurs se demander combien il y a de domaines dans la pièce. Certains de ces domaines sont à l'intérieur des cerceaux, d'autres ne le sont pas. Certains « domaines » seront de forme circulaire. C'est ce qui se produira pour les domaines situés à l'extérieur d'un petit cerceau mais à l'intérieur d'un grand (quand ils ne se touchent pas). Les enfants ne tarderont pas, en présence d'un nombre de cerceaux quelconque posés à terre, à voir combien de domaines se trouvent déterminés sur le sol de la classe. Pour leur faciliter la compréhension, surtout aux plus lents, on peut, sur une feuille de papier, dessiner la classe, avec les cerceaux, et teinter de couleurs différentes les divers domaines.

Dès que ce qui précède est bien établi, et après avoir, peut-être, inscrit au tableau le nombre de « domaines », on peut jouer au jeu suivant. Tout point de la circonférence d'un cerceau est un point d'une frontière. On prend, donc, un point d'une frontière et, à partir de ce point, on commence à construire une autre frontière, soit avec des cailloux, soit en traçant une ligne à la craie, jusqu'à ce qu'on ait rejoint un autre point quelconque de la même frontière ou d'une autre frontière. Après quoi, on demande aux enfants s'ils peuvent faire la même promenade qu'avant, sans franchir aucune frontière. La réponse sera peut-être qu'on ne peut plus la faire, parce qu'il faut maintenant traverser la nouvelle frontière mais, peut-être aussi, qu'on peut quand même atteindre le même point de destination par un autre itinéraire, qui évite de la traverser. S'il en est ainsi dans tous les cas, les enfants verront qu'il n'a été créé aucun domaine supplémentaire, et qu'on peut très bien ajouter des frontières sans ajouter des domaines. Cela fait, on peut demander aux enfants s'il y a moyen d'ajouter encore des frontières, toujours sans augmenter le nombre des domaines. Si on a commencé avec un nombre de domaines assez important, il faudra peut-être un certain temps avant de se heurter à une impossibilité. Comme les enfants avaient commencé avec l'idée qu'on pouvait sans cesse en ajouter, c'est avec une certaine surprise qu'ils se heurteront à l'obstacle. Certains enfants continueront, d'ailleurs, à essayer, et il faut les laisser faire ; qu'ils tracent des lignes de plus en plus compliquées, contournant en spirales les frontières déjà posées, ne s'apercevant pas que leurs tentatives sont vaines ; il viendra cependant un moment où, à force d'essayer sans résultat, ils acquerront la conviction que c'est impossible. Quant aux maîtres, nous leur laissons découvrir eux-mêmes les lois mathématiques qui régissent cette situation : nombre de domaines créés par un nombre donné de cerceaux, nombre de frontières supplémentaires qui peuvent, dans chaque cas, être tracées sans augmenter le nombre des domaines, etc. ; cela ne saurait en rien concerner les enfants, auxquels on ne peut pas demander de telles recherches à cet âge. Pour eux, il ne s'agit que d'un jeu avec les espaces, destiné à les faire réfléchir.

On peut aussi leur proposer une sorte de « puzzle ». La plupart des enfants ont déjà vu des jeux de patience de ce genre, où l'on assemble des pièces de formes et de couleurs différentes. Le résultat ressemble assez à la carte en couleurs de la France par départements. On dit d'abord aux enfants de dessiner une « carte » de ce genre, de n'importe quelle forme, avec plusieurs couleurs. Puis on leur propose de recommencer, mais seulement avec six couleurs, en leur recommandant de s'arranger pour qu'il n'y ait jamais, côte à côte, deux « pays » de la même couleur « pour qu'on ne puisse pas se tromper ». Enfin, dernier jeu, on leur demande de recommencer en employant le moins possible de couleurs différentes. Peu importe quelles formes ils choisiront, pourvu qu'il y ait au moins cinq divisions (et, en fait, il y en aura bien davantage!).

On peut toujours (dans l'état actuel de nos connaissances) atteindre ce résultat avec quatre couleurs, mais on n'a pas encore réussi à le démontrer. Personne n'est encore parvenu à réaliser un assemblage de ce genre *nécessitant* plus de quatre couleurs et il n'a pourtant jamais été établi que ce nombre fût suffisant. C'est un problème mathématique demeuré jusqu'à ce jour sans solution.

On incitera ensuite les enfants à faire d'autres dessins nécessitant encore moins de couleurs – deux, puis trois, puis quatre, en compliquant les tracés. Si les enfants croient avoir besoin de cinq ou six couleurs, on les invitera à reconsidérer leur choix, et l'ordre dans lequel elles ont été mises, jusqu'à ce qu'ils aboutissent à quatre.

Ainsi, nos jeunes enfants se sont intéressés à ce que nous avons appelé les propriétés « topologiques » de l'espace, aux frontières, aux « portes », aux espaces et aux « domaines », sans attention spéciale à la mesure. Vous trouverez ci-dessous, p. 21, d'autres jeux destinés à favoriser le développement de ces concepts. Il est à remarquer qu'ils aboutissent, progressivement, à la mesure, mais pas tout de suite. A noter, aussi, qu'on fait tracer aux enfants des lignes et des formes, des frontières et d'autres objets intéressants mais qu'à ce stade, il est vivement conseillé d'exécuter toutes ces opérations sur le sol, afin que les enfants puissent les contourner, les parcourir ou les franchir à pied. Ils ne sont pas encore mentalement préparés aux dessins géométriques de petit format réalisés sur une feuille de papier, et il ne faut pas les leur demander trop tôt.

3. EMPLOI DES TRANSFORMATIONS EN GÉOMÉTRIE

Cette étape du développement comporte l'introduction des transformations géométriques organisées autour des notions de *symétrie* et de *rotation*. Soulignons qu'il y faut action et attention, mais soulignons aussi et surtout qu'il n'est pas dans notre propos d'en faire le véhicule d'une théorie quelconque, qui ne serait pas du niveau des enfants. La première série de jeux sera composée de jeux de « pivotement » et intéresse la symétrie.

3.1 *Jeux de « pivotement ». Transformations symétriques*

Si on prend entre ses doigts une forme symétrique simple et si on la fait « pivoter », c'est-à-dire tourner autour de son axe de symétrie, on voit que cette transformation « transporte » chacun des points de la figure en une nouvelle position, bien que la forme, en soi, occupe le même emplacement de l'espace. C'est vrai de tous les points qui ne sont pas situés sur l'axe de symétrie, ces derniers ne changeant pas de place. Bien entendu, il n'est pas question pour les enfants, à cet âge, d'apprendre ce que sont les axes de symétrie d'une figure quelconque ; les maîtres, eux, savent bien que tout rectangle a deux axes de ce genre, tout triangle équilatéral trois, tout carré quatre et tout cercle une infinité d'axes de symétrie. Pour ajouter de la variété au jeu, on peut d'ailleurs recourir à des formes autres que ces figures géométriques simples, par exemple à un trèfle au lieu d'un triangle, et ainsi de suite.

A partir de ces éléments, on peut organiser quelques jeux très intéressants pour les enfants. Par exemple, on peut commencer avec un 8, forme qui, comme le rectangle, comporte 2 axes de symétrie. On trace à la craie, sur le sol, une sorte de marelle en forme de 8 et on y représente les deux axes, l'axe vertical par une ligne verte, l'axe horizontal par une ligne rouge. On prend, d'autre part, une plaque de bois de forme semblable, sur laquelle on marque également les axes de symétrie, mais sans les colorier. Cinq enfants participent à ce jeu. Le premier, que nous appellerons, si vous voulez, le meneur de jeu, se tient au centre du huit, la plaque à la main. Chacun des quatre autres occupe, comme aux « quatre coins », un des secteurs de la marelle en huit, qu'il considérera comme son camp, sa base. Ses initiales y seront indiquées, sur le sol, à la craie. On porte les mêmes marques sur la plaque, au recto et au verso. Le jeu peut commencer.

La première partie a pour but de montrer aux enfants que s'ils étaient effectivement « dans leur camp » sur la plaque de bois, ils se trouveraient amenés à une nouvelle position quand on la fait tourner. Voir dans l'espace n'est pas toujours aisé, surtout pour certains enfants un peu lents, et on peut les y aider en faisant, dans la plaque, un petit trou par base ou camp, dans lequel on passe une ficelle. Quand on bascule la plaque, chaque enfant suit (avec un peu de difficulté) sa ficelle et trouve sa nouvelle place. En tout cas, les enfants admettent assez facilement qu'un pivotement les fasse changer de place.

Le second jeu consiste à faire deviner aux enfants leur point d'arrivée selon ce que le meneur de jeu annonce. Par exemple, il dit: « Je tourne vert » (ce qui veut dire qu'il fait pivoter la plaque autour de l'axe vert), il exécute rapidement le mouvement de pivotement, mais revient aussitôt à la position d'origine. Les camarades quittent alors leur camp pour gagner le coin qu'ils croient être le leur. Le meneur de jeu exécute alors de nouveau le pivotement et pose la plaque à terre. On peut alors y lire les noms (ou les initiales) et chacun peut voir s'il a deviné correctement. On recommence en tournant autour de l'axe rouge ou, encore, avec d'autres formes et d'autres pivotements.

Comme variante, on peut demander : « Comment arriver là ? » Le meneur de jeu dit à chacun où il doit aller et les autres doivent deviner quel est le pivotement nécessaire. Plus tard, on peut recourir à des figures plus complexes, mais il est préférable de s'assurer d'abord que les enfants ont bien compris les figures simples.

Un quatrième jeu consiste à se demander comment on retournera au camp en un seul pivotement, à partir de n'importe quelle position autre que celle d'origine. Au bout d'un certain temps, on peut lier tout cela à l'un ou l'autre des jeux précédents, et jouer le tout en partie double. Autrement dit, le meneur de jeu commence en disant : « Je vais tourner rouge » et les autres devinent où ils vont se trouver alors. Puis le meneur demande: « Comment faut-il tourner pour vous ramener à la maison? » et la réponse est, évidemment: « Rouge. » Ou encore, le meneur dit: « Toi, tu vas être là, toi ici, toi là, toi là quand j'aurai tourné. Comment faut-il que je tourne? » et les camarades devinent. Ensuite, ils exécutent réellement le mouvement, et si c'est faux ils retournent à leur place et recommencent. Quand ils ont deviné juste et qu'ils ont gagné la nouvelle position, le meneur de jeu demande: « Comment faut-il que je tourne pour vous ramener au camp ? » et la réponse sera, bien entendu, que c'est le même pivotement, encore une fois.

On peut aussi jouer en associant deux pivotements, par exemple un rouge et un vert. Où seront alors les joueurs? C'est beaucoup plus difficile et, pour commencer, il faut prendre les deux pivotements séparément et amener les enfants à bien voir leur nouvelle position. Il ne leur faut pas longtemps, toutefois, pour découvrir ce qu'elle sera au bout de deux pivotements successifs. Puis on inverse l'ordre de ceux-ci : le vert d'abord, le rouge ensuite. Là encore, les enfants doivent deviner leur nouvelle position.

La sixième sorte de jeu consiste, après avoir exécuté deux pivotements successifs, à demander aux enfants comment ils peuvent revenir à leur base en un seul mouvement. C'est difficile, car pour revenir au camp, il faut faire exécuter à la plaque une rotation d'un demi-tour dans son plan, sans pivotement autour d'un axe, et il faut parfois toute une leçon aux enfants pour le découvrir. Aussi ne faut-il pas vouloir aller trop vite.

Chacun de ces jeux peut – et devrait – être joué à nouveau avec des figures plus difficiles, ayant plus de deux axes de symétrie. Il n'est pas question, naturellement, que les enfants retiennent les solutions par cœur. Il s'agit seulement pour eux d'élaborer dans chaque cas la réponse par leur propre effort mental.

3.2 *Jeux de rotation*

Ces jeux sont de structure analogue, avec le même genre de « marelle » sur le sol, la même manière de marquer les camps, le même nombre d'enfants – un par base – et un meneur de jeu qui fait tourner la plaque dans son propre plan au lieu de la faire pivoter autour d'un axe de symétrie. On pose la plaque de bois au centre, sur le sol, et on la fait tourner de quatre manières : un tour, un demi-tour, un quart de tour à droite, un quart de tour à gauche. On peut, par exemple, prendre comme forme celle d'un trèfle à quatre feuilles, avec quatre axes de symétrie et huit sections, marquées chacune du nom de l'enfant dont elle est la base.

Le premier jeu sert à familiariser les enfants avec les différents mouvements possibles et avec leur exécution. Pour commencer, chaque enfant peut tenir la partie de la plaque correspondant à sa base, et suivre le mouvement quand le meneur de jeu la fait tourner. En principe, certains jeux antérieurs devraient leur avoir appris la différence entre « tourner à droite » et « tourner à gauche », mais il y a des petits pour qui c'est encore difficile pendant un certain temps.

Cette préparation achevée, on peut introduire des jeux suivant la progression exposée plus haut. Le meneur de jeu, ou « tourneur » dit : « Je vais faire un demi-tour. Où serez-vous ? » Il tourne rapidement la plaque d'un demi-tour et la ramène. Les autres changent ensuite de position, puis le tourneur pose la plaque à terre, la tourne effectivement, et on contrôle. Si les enfants ont mal deviné, ils retournent à leur place et on recommence.

Dans le jeu suivant, le tourneur dit : « Quand j'aurai tourné ma plaque, vous serez là. Comment est-ce que je vais la tourner ? » Chacun se place, puis essaie de deviner comment la plaque va tourner.

Puis le meneur tourne la plaque et on vérifie.

Après quoi, un autre jeu consiste à deviner par quel mouvement on reviendra au point de départ après un mouvement antérieur. Ainsi, après un déplacement provoqué par « un quart de tour à droite », il faut, évidemment, pour revenir en position d'origine, « un quart de tour à gauche », et ainsi de suite.

Dans le jeu suivant, on combine deux rotations. Par exemple, le tourneur dit: « Je vais faire un demi-tour, puis un quart de tour à droite. Où serez-vous ? » Les enfants se placent, on vérifie, et la question suivante peut être : « Et maintenant, qu'est-ce qu'il faut faire pour revenir au camp ? » La réponse est, évidemment : « Un quart de tour à droite. »

3.3 *Jeux combinés*

Il y a, naturellement, des chances pour que les enfants aient envie de combiner jeux de pivotement et jeux de rotation ; il faut les laisser faire, car cela maintient les esprits en état d'alerte. Par exemple, les joueurs quittent leur base par deux pivotements successifs et y reviennent par une rotation. Quand on permet, quand on encourage même les enfants à inventer des jeux, ils le font avec grand plaisir et souvent, pour notre part, nous avons vu réussir l'introduction simultanée de pivotements et de rotations.

3.4 *Jeux de poursuite*

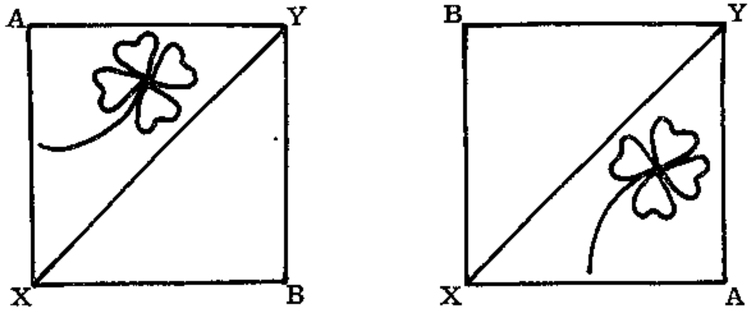
Les jeux de poursuite peuvent se jouer avec les pivotements comme avec les rotations. Le « lapin » annonce au « chasseur » les deux mouvements qu'il va faire (par exemple un « pivotement vert » suivi d'un « pivotement rouge ») et occupe la position qui en résulte. Le « chasseur » est tenu de le rattraper, c'est-à-dire de gagner la même position, grâce à *une seule* transformation, qui pourra être un pivotement ou une rotation selon ce qu'il est autorisé à faire. Quant au « lapin », il faut qu'il soit capable de revenir à sa base en un seul mouvement, qui sera, naturellement, le mouvement inverse de celui du chasseur si les deux joueurs sont partis de la même base.

Supposons qu'on joue à la poursuite uniquement avec des rotations. Le tourneur se tient au centre de la marelle et les deux joueurs attendent dans le même secteur. Le « lapin » dit : « Je vais faire un quart de tour à droite, puis un demi-tour », et il le fait. Le « chasseur » dit : « Je vais te rattraper par un quart de tour à gauche », ce qui est la bonne solution, comme le montrent le tourneur en tournant sa plaque et le chasseur en rejoignant le lapin. Pour retourner à la maison en un seul mouvement, le lapin doit faire l'inverse du mouvement du chasseur ; comme ce dernier était d'un quart de tour à gauche, il fait un quart de tour à droite.

3.5 *Divers modes de réalisation des transformations symétriques*

Supposons que les enfants aient découvert les quatre axes de symétrie du carré, ou du trèfle à quatre feuilles, par la méthode des pivotements. Par exemple, ils ont peut-être découvert que le carré

Fig. 1



de gauche de la fig. 1 devient le carré de droite par pivotement autour de l'axe xy, de sorte que les points A et B permutent, tandis que les points x et y demeurent inchangés. Il est recommandé, d'ailleurs, de se servir de carrés en matière plastique transparente pour cette démonstration, afin de permettre aux enfants de bien se rendre compte de l'orientation et de la position de la fleur après pivotement. Ce qui est même mieux encore, c'est d'avoir deux carrés transparents ; on peut ainsi superposer le carré « pivoté » et le carré « non pivoté » et comparer ainsi plus facilement les deux positions de la fleur. L'état initial et l'état final sont visibles simultanément, et l'enfant prévoit mieux quelle sera la situation après un pivotement.

Prenons maintenant un enfant qui, après un certain nombre d'expériences personnelles, a bien compris cette situation. Donnons-lui un petit miroir doté de deux surfaces réfléchissantes, une de chaque côté. Demandons-lui de disposer le miroir par rapport au carré fleuri de telle manière qu'en regardant dans le miroir il y voie la fleur comme si le carré avait pivoté. Beaucoup d'enfants y trouvent une grande difficulté. On en voit même qui rampent sur le dos en tenant le miroir horizontalement au-dessus de leur tête. Quand, finalement, l'enfant découvre qu'il faut placer le miroir verticalement sur la diagonale xy, quel sentiment de triomphe! Il semble que pour un enfant de cet âge, « trouver l'image dans le miroir » et « faire pivoter la figure autour de son axe de symétrie » soient deux activités très différentes. D'ailleurs, elles le sont, en fait. Seul le contenu mathématique est le même. Découvrir la similitude mathématique entre deux modes de réalisation de la même transformation symétrique, c'est peut-être là le premier pas de l'enfant en direction de ce qu'il y a d'abstrait dans une transformation à base de symétrie.

L'étape suivante du jeu des miroirs peut consister en la création d'une image apparente à partir de matériaux concrets. Par exemple, on construit, à l'aide de bouts d'allumettes, la lettre L d'un côté du miroir (de préférence, un miroir à double face, fixe dans un plan vertical). La plupart des enfants, quand on leur dit de construire l'image réfléchie du L dans le miroir, oublient de le faire à l'envers. Ils sont tout surpris de s'apercevoir que ce qu'ils ont fait n'est pas ce qu'on voit dans le miroir. Une multitude d'exercices de ce genre fait pénétrer dans l'intelligence des enfants le caractère essentiellement « inverseur » des miroirs et, bien entendu, d'une manière plus générale des transformations symétriques.

On passe à l'étape suivante en prenant deux miroirs. On les dispose dans deux plans verticaux faisant entre eux un angle droit. Le mieux est d'obtenir que les enfants les disposent aussi près que possible l'un de l'autre, de manière à faire un « coin ». On peut alors construire ou dessiner quelque chose dans le coin, puis construire derrière chaque miroir les images de ce qui a été construit. Il ne faudra pas longtemps aux enfants pour découvrir qu'il y a une autre image, qui se présente comme le reflet du reflet dans chacun des miroirs. Dans chaque miroir il y a un reflet de l'autre miroir, et ce miroir réfléchi donne une autre image. Les enfants veulent aussi construire cette image. La maîtresse doit s'assurer que chaque enfant réinverse ses figures. La quatrième « construction » ne sera plus un reflet, mais une version « retournée » de la construction première.

A titre de variante intéressante de ce jeu, on peut mettre des lettres, de préférence des majuscules, dans le coin formé par les deux miroirs. On découvre que certaines lettres sont tout à fait insensibles à ce genre de traitement et demeurent obstinément semblables à ce qu'elles sont, tandis que d'autres, plus délicates, tendent à changer dans un des miroirs, ou dans l'autre, ou dans les deux à la fois. Parmi les lettres intéressantes, citons Z, M et S, qui changent dans l'un ou l'autre miroir, et, cependant, apparaissent correctement dans l'image de coin. Si on a des lettres en matière plastique ou en bois, on peut s'en servir à cet effet, et on peut demander aux enfants ce qu'il faudrait qu'ils fassent aux lettres *dans la réalité* pour qu'elles deviennent comme leur image du miroir. Parfois il faut les retourner sens dessus dessous, parfois il suffit de les faire pivoter dans leur propre plan.

Ce jeu de pivotement ou de rotation obéit aux mêmes règles que celui que nous avons décrit dans *Logique et jeux logiques*, en 10.4.

Si on a des triangles équilatéraux en bois ou en plastique, on peut commodément s'en servir pour disposer les deux miroirs à 60° l'un de l'autre. Les enfants ont alors la surprise de découvrir qu'en construisant quelque chose dans le coin, ils voient six constructions (en comptant celle qu'ils ont réalisée) et non plus quatre. Certains enfants s'écrient d'émerveillement. Certains veulent alors construire les « étoiles » à six branches qui résultent du matériel employé pour la construction.

Il est évident qu'on peut poursuivre dans cette direction en mettant les miroirs à 45°, ce qui donne huit constructions. Deux constructions non consécutives peuvent se superposer par rotation, mais il n'en est pas de même de deux voisines.

Bien entendu, il n'est nullement question de faire « apprendre » une explication mathématique quelconque de ce qui précède. Les jeux et activités que nous avons décrits n'ont d'autre but que d'ouvrir aux enfants des fenêtres donnant sur divers champs de recherche, afin que, lorsque le moment sera venu, les idées qu'ils développeront soient basées sur des situations avec lesquelles ils seront déjà familiarisés.

APPENDICE I

JEUX CONDUISANT A UNE CERTAINE COMPRÉHENSION DE LA GÉOMÉTRIE

Nous ne donnons ici que quelques exemples de chaque type de jeu ; il appartiendra au maître d'approfondir le détail en multipliant les jeux de type semblable, impliquant soit les mêmes concepts, soit des concepts analogues.

1.1 *Emploi des attributs*

C'est à la compréhension d'attributs tels que *long*, *court*, *rugueux*, *lisse*, *grand*, *petit*, *droit*, *tordu*, *poi tu*, *émoussé*, *rond*, *plat*, et ainsi de suite que visent ces jeux.

Pour cela, on répartit les enfants en petits groupes de six à huit, et à chaque groupe on remet un plateau dans lequel il y a, par exemple, un crayon long et un crayon court, un bâton droit et un bâton tordu, une grande boîte et une petite boîte, une feuille de papier abrasif et une feuille de papier à écrire, une forme arrondie, un bâton pointu, un dé, et ainsi de suite.

On demande aux enfants de choisir un objet quelconque dans le plateau. La maîtresse demande, par exemple: « Jeannette, veux-tu nous apporter une grande boîte ? » ou « Jacques, veux-tu me donner une feuille de papier rugueux ? » Il faut donner à chaque enfant l'occasion de choisir lui-même chaque type d'objet, et noter soigneusement ceux qui ne sont pas capables de se tirer de cette tâche. On les prendra à part et on multipliera pour eux les exercices. Dans certains cas, il faudra choisir une paire d'articles et les faire comparer. Par exemple, on comparera un « crayon taillé » et un « crayon émoussé », ou une « grande » boîte avec une « petite » boîte, et ainsi de suite.

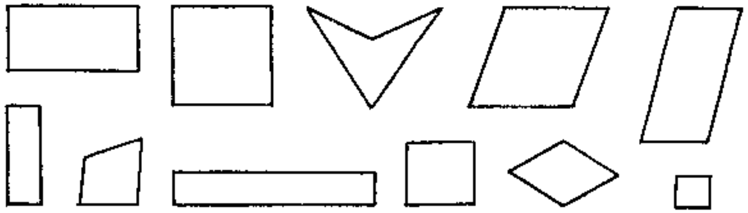
En multipliant le nombre des objets, on peut contrôler si tel ou tel concept s'est bien formé, et contribuer éventuellement à son développement.

1.2 *Formes*

Ces jeux conduisent à la reconnaissance des formes telles que carré, triangulaire, rond, rectangulaire (long).

Il vaut mieux, pour ce genre de jeux, commencer avec toute la classe, car il est peu probable que beaucoup d'enfants aient déjà eu l'occasion de découvrir ces différentes formes. On se servira de « blocs logiques » ou l'on découpera, dans du carton, plusieurs exemples de chaque forme, en plusieurs tailles. Il n'est pas inutile d'en colorier certaines.

Fig. 2 DIFFÉRENTES SORTES DE QUADRILATÈRES



Colorier les carrés en rouge, en bleu les « longs » rectangles qui ne sont pas des carrés.

La maîtresse choisit une forme et demande aux enfants de chercher celles qui sont « pareilles ». On peut ensuite en discuter, et même en tracer un grand modèle sur le sol, afin que les enfants puissent en faire le tour. Puis on lui donne un nom. Quand on a bien discuté de toutes les formes, on peut personnaliser le jeu en faisant choisir à chaque enfant, tour à tour, une forme particulière.

1.3 *Couleurs*

Ces jeux conduisent à la reconnaissance des couleurs le plus souvent rencontrées, le rouge, le jaune, le vert, le bleu, le blanc et le noir. On met des objets divers dans les couleurs choisies sur un plateau et on demande aux enfants de « prendre quelque chose de vert », quelque chose de jaune, etc. Plus tard, on pourra demander « un crayon vert », etc. On s'aperçoit qu'il y a de grandes différences dans l'aptitude des enfants à reconnaître les couleurs avec certitude. Lorsqu'on constate qu'un degré satisfaisant de précision dans la reconnaissance des couleurs est atteint, on peut combiner ce jeu avec le précédent.

1.4 *Relations spatiales simples*

Ces jeux conduisent au développement d'autres concepts, tels ceux de *près, dedans, dehors, sur, près de, sous, avant, après,* et ainsi de suite. Il faut faire travailler les enfants par groupes relativement réduits, et chaque groupe doit disposer d'un plateau comportant un nombre relativement important d'objets. La maîtresse, ou un moniteur de groupe, peut demander à un enfant : « Marie, veux-tu, s'il te plaît, mettre le crayon long dans la grande boîte ? » ou « Jeannot, veux-tu poser le dé sur la petite boîte ? » et ainsi de suite. Là encore, il faut

vérifier une à une la formation de tous les concepts chez tous les enfants.

Nous n'ignorons pas que toutes les bonnes maîtresses des écoles maternelles connaissent, et appliquent ce genre de jeux depuis longtemps, et si nous les mentionnons ici, c'est seulement pour être complets, et dans l'hypothèse où quelque maître ou maîtresse manquant encore un peu d'expérience n'y aurait pas songé, car la formation correcte de ces concepts est fondamentale pour le genre de géométrie dont il est question ici. Si nous suggérons de jouer ces jeux en groupes, c'est afin de fournir à chaque enfant le plus grand nombre possible d'expériences au cours d'une même leçon. Ce qu'il faut surtout, c'est encourager la discussion, y compris la mise en question *par certains élèves* des résultats ou des réponses des autres, le maître n'intervenant que si c'est absolument nécessaire.

1.5 *Combinaison des concepts*

N'oublions pas que même si ces exercices ont pris beaucoup de temps au début de l'année, on a affaire à des enfants qui ne savent pas encore lire et ne peuvent donc pas se conformer à des instructions écrites. Le maître a préparé des cartes, sur lesquelles sont portées des instructions telles que : « Mettre le grand crayon rouge dans la petite tasse blanche ». Il les bat, les fait tirer chacun à son tour par les enfants, et lit lui-même à haute voix ce qui y est écrit. Si l'opération a été correctement exécutée, l'enfant prend un jeton. Si un camarade lui fait remarquer, à juste raison, qu'il s'est trompé et rectifie, c'est ce dernier qui a droit au jeton. Le maître compte les jetons et proclame le gagnant.

1.6 *Pratique des concepts*

On pose à terre le plus grand nombre possible d'objets de toutes les formes et de toutes les couleurs. Un premier enfant, désigné par le sort, dit : « Attention ! Je vois quelque chose de rouge, devinez ce que c'est. » Les autres enfants trouvent divers objets rouges et demandent au premier enfant si c'était celui-là. C'est celui qui a deviné juste qui, à son tour, pose la question suivante. On « marque » à l'aide de jetons.

L'étape suivante sera de penser à des objets qui ne sont pas à terre, mais n'importe où dans la pièce, et même dans la cour : il faut les chercher du regard, et même en se déplaçant.

1.7. *Frontières et domaines*

Il est recommandé de jouer ce jeu dans la cour : on divise la classe en deux groupes, par exemple les garçons et les filles. Les garçons ont deux camps, situés à quelque distance l'un de l'autre, entourés chacun d'une frontière, et les filles ont un seul camp, entouré, lui aussi, de sa frontière. Les filles se mettent dans leur camp, et les garçons dans un de leurs deux camps. Au signal, les garçons changent de camp, mais si une fille peut attraper un garçon en le touchant pendant qu'il est hors du camp, ce garçon doit se joindre aux filles et aider à attraper les autres garçons. La partie est finie quand tous les garçons ont été attrapés. Puis on permute équipes et camps, et ce sont les garçons qui doivent attraper les filles.

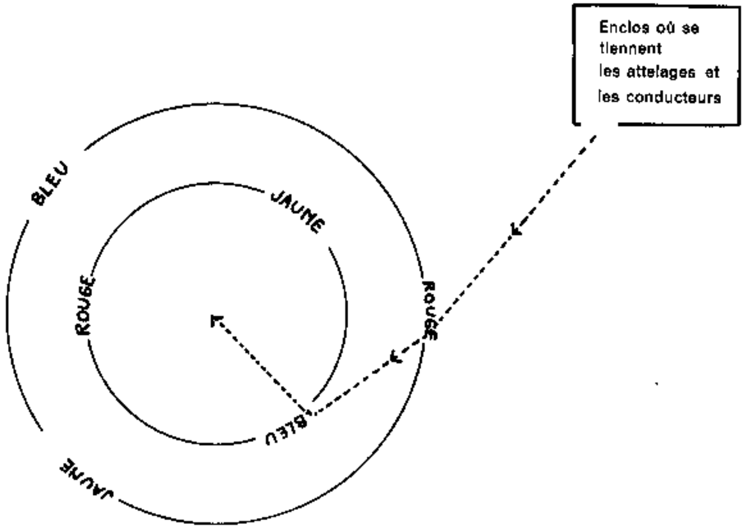
Pendant ces jeux, on utilisera, toutes les fois que c'est nécessaire, les termes « frontière » et « domaine » ou « camp ».

1.8 *Frontières et passages*

La plupart des enfants aiment à jouer « au cheval » ou « au train », ou « à Zorro » : deux enfants sont les chevaux, attachés par une corde dont les extrémités sont tenues par un « conducteur » ou un « cocher ». On peut utiliser ces jeux pour introduire la notion de « passage », de « porte ». Sur le sol de la cour on trace deux enceintes concentriques de grandes dimensions (deux « cours »), possédant chacune une porte bleue, une porte rouge et une porte jaune, mais disposées de telle manière que la porte d'une certaine couleur de l'une des deux enceintes

Fig. 3 LE PASSAGE DES PORTES ROUGES ET BLEUES

Le chemin le plus court est indiqué par le pointillé.



On peut également faire l'exercice du retour à l'enclos.

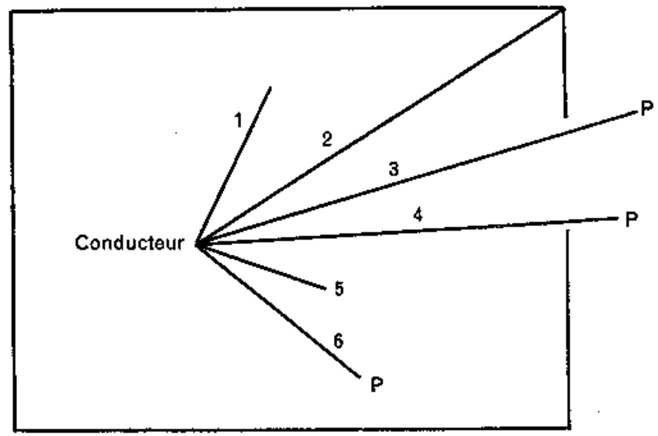
ne soit pas voisine de la porte de même couleur de l'autre enceinte. On commence en disant au conducteur, mais à lui seul : « Tu conduiras tes chevaux jusque dans le parc du milieu, mais seulement en passant par les portes bleues. » Les « chevaux » ne savent pas par quelle porte il faut passer, et c'est le conducteur qui doit les guider en se servant des rênes. Il a gagné s'il réussit à prendre le plus court chemin. On recommence en renversant les rôles.

A l'étape suivante, le conducteur doit utiliser deux couleurs (par exemple, rouge et bleu), et il sait qu'il doit passer par la porte extérieure rouge et la porte intérieure bleue. Les autres enfants ont le droit de contester l'itinéraire choisi et de montrer qu'il y en avait un plus court. Si les « chevaux » passent par-dessus les frontières au lieu d'emprunter une porte, cela compte comme une faute et l'équipe perd un point.

1.9 *Salles et portes*

Ce jeu se joue dans une pièce ne comportant qu'une seule porte. La maîtresse a préparé plusieurs morceaux de ficelle de longueurs différentes et plusieurs morceaux de carton, dont la plupart n'auront aucune inscription, mais dont certains porteront le dessin d'une porte. Chaque enfant prend une ficelle dans une boîte tenue au-dessus de sa tête, afin de l'empêcher de voir ce qu'il prend. On mélange les morceaux de carton et on les pose à terre, le recto contre le sol ; chaque

Fig. 4 SALLES ET PORTES



Des six joueurs le numéro 2 a tiré la ficelle la plus longue, mais il a obtenu une carte nulle et ne peut pas aller plus loin que jusqu'à l'angle.
Le numéro 6 de son côté a tiré un P (dessin d'une porte), mais une ficelle assez courte. Pour jouer le jeu, le joueur doit tirer une ficelle longue *et* doit être capable de passer par la porte grâce à la carte qui l'y autorise.

enfant en tire un. Ensuite, un enfant se met au milieu de la pièce. Chacun des autres lui fait tenir l'une des extrémités de sa ficelle et s'éloigne ensuite de lui le plus possible. Seuls ceux qui ont tiré un carton représentant une porte ont le droit d'ouvrir la porte et de la franchir. Cela signifie qu'il y a deux facteurs déterminant la distance à laquelle chaque enfant a le droit de s'éloigner : la longueur de la ficelle et le droit de prendre la porte. Si l'enfant est allé le plus loin possible mais sans pouvoir sortir de la pièce, il doit enrouler sur elle-même ce qui lui reste de ficelle. Le gagnant est celui qui a réussi à s'en aller le plus loin. L'accent se trouve ainsi mis sur l'importance des ouvertures dans un espace à trois dimensions.

On peut varier ce jeu en faisant prendre à l'arbitre des positions différentes dans la pièce. Les enfants verront rapidement les différences qui en résultent.

1.10 *L'envers*

Dans le jeu précédent, il fallait trouver l'enfant qui irait « le plus près » et celui qui irait « le plus loin » de l'arbitre. On peut approfondir cette idée de « point le plus rapproché » ou « le plus éloigné » d'un point de départ. Pour cela, on se servira d'abord d'un tableau noir dont les deux faces soient accessibles, et on marquera un point de départ au centre de l'une des faces. Chaque enfant choisit au hasard une ficelle et s'en sert pour déterminer un point sur le tableau. On organise ensuite un concours entre les enfants, chacun essayant de marquer le point qui, selon lui, est le plus éloigné du point de départ. On « mesure » ensuite les différentes tentatives en comparant la longueur des morceaux de ficelle.

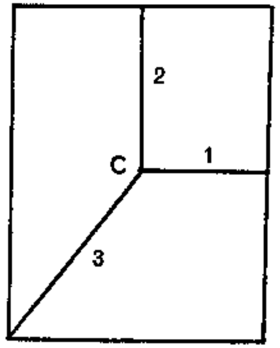
La maîtresse attire ensuite l'attention sur le fait que le tableau comporte une autre face et qu'on peut peut-être s'éloigner davantage du point de départ en se servant des deux côtés du tableau. Il en résulte quelque réflexion, car certains enfants, en essayant de se servir de l'autre face du tableau, ne se rendent pas compte qu'il y a plus d'une manière d'atteindre le point d'arrivée à partir du point de départ. (Par exemple, si on démarre du centre recto du tableau, certains enfants vont partir en traversant le petit côté, d'autres le grand côté, puis, au revers, continuer dans une autre direction. S'il leur arrive, au verso, d'aller au-delà du point opposé au point de départ, ils se rapprocheront, à partir de là, du point de départ.) Tous ces exercices entraînent force discussions, donc force réflexions, et c'est cela seul qui compte.

1.11 *Verso et trous*

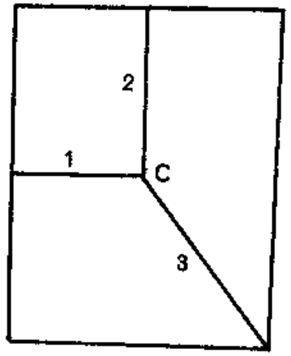
Ce jeu est analogue au précédent, à une importante, très importante variante près. Au lieu d'utiliser un tableau noir, il se joue avec une feuille de carton de dimensions semblables. Là encore, il y a un point de départ, mais cette fois on fait un trou dans le carton, après quoi

on recommence à chercher quel est le point le plus éloigné, ou le plus rapproché, du point de départ. Les enfants s'aperçoivent de ce que la présence d'un trou modifie complètement l'aspect du problème de la distance entre deux points situés de part et d'autre du tableau, puisqu'on peut faire passer la ficelle par le trou.

Fig. 5 LES POINTS LES PLUS ÉLOIGNÉES DE C

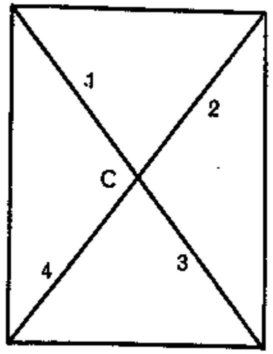


recto

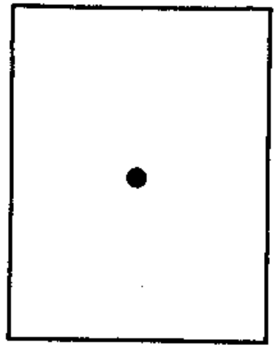


verso

L'ENVERS AVEC UN TROU



recto


verso

1.12 *Les frontières considérées comme chemins*

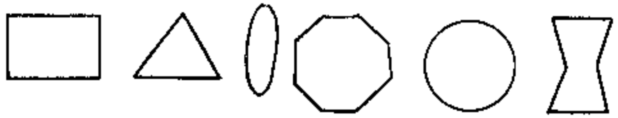
On divise la classe en groupes, et on attribue à chaque groupe, comme « base » ou « domaine », une partie de la cour de récréation. A l'intérieur de son domaine, chaque groupe a le droit de tracer plusieurs bases. On demande à chaque groupe d'essayer de dessiner différentes sortes de frontières dans ses bases. Certains essaient de dessiner des bases circulaires, d'autres vont essayer de tracer des frontières formées de lignes droites – certaines à trois côtés, d'autres à quatre, voire davantage. La plupart formeront, si vous voulez, des « chemins simples », c'est-à-dire simplement tracés autour de la base. Après avoir tracé des chemins ronds, les groupes dessinent généralement des quadrilatères de divers aspects. La plupart sont des figures « convexes », c'est-à-dire à l'intérieur desquelles il est possible de se déplacer en ligne droite entre deux points sans sortir des limites de la figure. Peu d'enfants, à ce stade, tendent à tracer des figures « concaves ». Mais il y en a quelques-uns. Aussi peut-on introduire l'idée de figures convexes et de figures concaves, et revenir sur les différentes formes jusque-là présentées aux enfants. Les enfants peuvent examiner les diverses sortes de quadrilatères (figures à quatre côtés) et décider lesquelles sont des carrés, lesquelles sont des « longs », c'est-à-dire des « rectangles », et lesquelles ne sont ni l'un ni l'autre.

Quand on a discuté de ces figures, on peut demander aux enfants s'il n'y aurait pas d'autres sortes de frontières ou de « chemins » qu'on pourrait utiliser. Ce que nous essayons d'introduire là, ce sont les « chemins complexes ». Examinons un « chemin » ou une frontière en forme de 8. C'est la forme la plus simple de « chemin complexe », puisque les côtés n'ont qu'un seul point commun. Il se peut qu'un tel « chemin » soit construit par un enfant sans qu'on le lui ait dit. En fait, si on suggère aux enfants d'essayer de dessiner un « chemin » qui soit différent de tous ceux qu'on a dessinés jusque-là, il y a des chances pour qu'ils en découvrent un de ce genre. Étant donné que les enfants ont généralement l'impression qu'un tel chemin entoure en fait plus d'une base ou région, il est préférable, à ce stade, de parler de « chemins » plutôt que de « frontières ».

Ainsi, grâce à cette série de jeux, les enfants sont en mesure d'apprendre et de discuter les notions de « figure convexe » et de « figure concave », et de « chemins simples ou complexes » tout en approfondissant leurs connaissances dans le domaine des figures simples en général.

Fig. 6 « CHEMINS » SIMPLES ET « CHEMINS » COMPLEXES : FRONTIÈRES

Simples



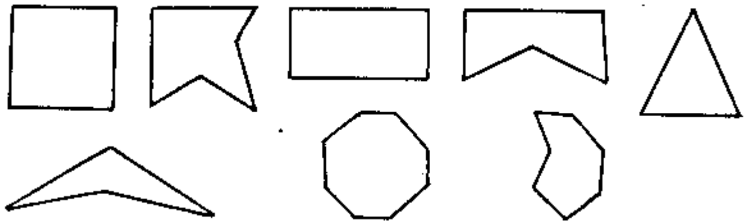
Complexes

Figures convexes et non-convexes

Convexes

Non-convexes, c'est-à-dire concaves

Fig. 7 FIGURES CONVEXES ET NON-CONVEXES



Coloriez en rouge toutes les figures convexes.

Fig. 8 « CHEMINS » SIMPLES ET COMPLEXES. COLORIEZ EN ROUGE TOUS LES « CHEMINS » SIMPLES

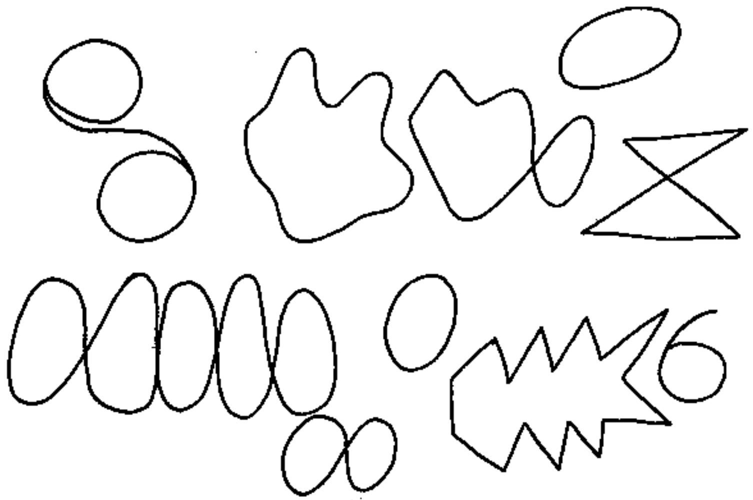
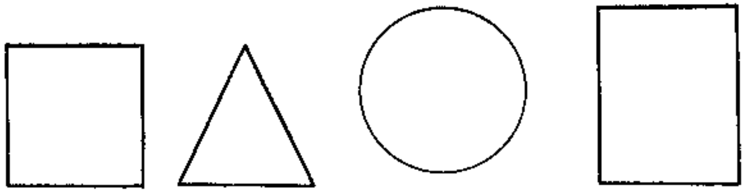


Fig. 9 A L'INTÉRIEUR, A L'EXTÉRIEUR



1. Dessinez une ligne à l'intérieur du triangle.
2. Dessinez un petit triangle à l'intérieur du cercle.
3. Faites un gros point à l'extérieur du carré.
4. Dessinez une ligne courte à l'extérieur du rectangle.

1.13 *Frontières et domaines*

Nous avons décrit ce jeu dans le texte. On convient avec les enfants « pour rire » que la cour de récréation ou la salle de classe dans laquelle on joue s'étendrait très, très loin, et qu'elle n'aurait pas de frontières. On va y faire « des frontières à nous », par exemple avec des cerceaux de diverses tailles. Prenons cinq enfants et faisons leur choisir des cerceaux : trois grands et deux petits, par exemple. Chacun va poser son cerceau quelque part dans la cour, n'importe où, à condition que les cerceaux ne se touchent pas. Lorsque chaque enfant a posé son cerceau à terre, il reste dedans, et c'est son domaine, et il a le droit de s'y promener comme il veut à condition de ne pas franchir la frontière. Si l'on demande alors : « Combien de frontières avons-nous fait ? » la réponse sera, naturellement : « Cinq. » Si, ensuite, on demande : « Et des domaines, combien en avons-nous fait ? » il se peut que la réponse soit encore : « Cinq. » Mais cette fois, la réponse est fausse, car il y a un grand domaine, situé à l'extérieur de tous les cerceaux, dans lequel on peut, aussi, se promener sans traverser de frontière. Mettons-y un enfant : tous les autres voient alors qu'il y a bien six domaines.

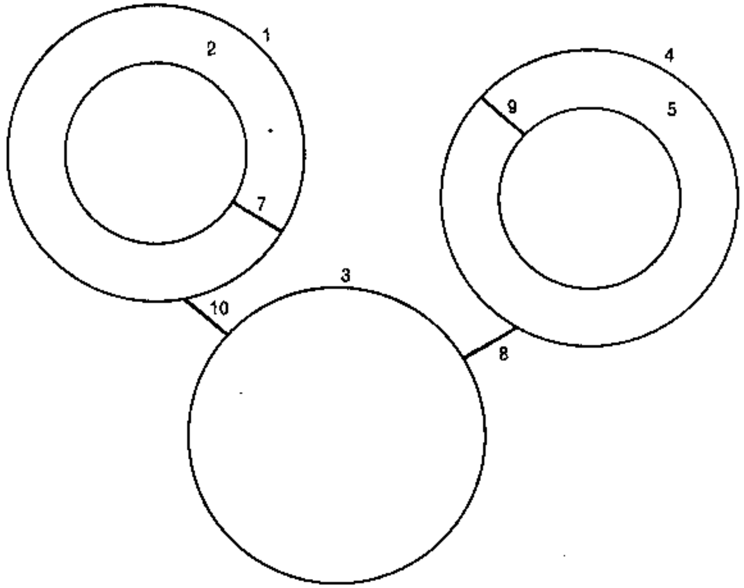
Ramassons maintenant les cerceaux et essayons de les disposer autrement. Y aura-t-il nécessairement toujours six domaines ? Existe-t-il une autre manière *possible* de placer les cerceaux de manière qu'ils ne se touchent pas ? Les enfants découvrent bientôt qu'on peut mettre les petits dans les grands. Encore une fois, on examine combien il y a de domaines, et on découvre avec surprise qu'il y en a toujours six, malgré le raccourcissement de certaines des promenades possibles.

Il faut recommencer ce jeu avec moins, puis avec plus de cerceaux, afin de bien laisser découvrir aux joueurs combien on obtient de domaines et de frontières dans chaque cas.

1.14 *Augmenter le nombre de frontières*

Revenons à nos cinq cerceaux et à nos six domaines. On explique aux enfants qu'ils ont le droit de réunir par une ligne n'importe quel point d'une frontière à n'importe quel point d'une autre frontière, comme ils voudront. Le plus simple, c'est de le faire à la craie, mais on peut le faire aussi en posant des cailloux, etc. Puis on demande : « Combien avons-nous de frontières maintenant ? » La réponse est : « Cinq, mais il y en a une qui est complexe. » On demande alors : « Et des domaines, combien y en a-t-il ? » Beaucoup d'enfants répondront qu'il y en a sept. Alors, il suffit de remettre les joueurs en marche, et de voir quels parcours ils peuvent effectuer. Un des joueurs va s'apercevoir que son itinéraire est coupé. Mais en résulte-t-il pour

Fig. 10 FRONTIÈRES ET DOMAINES



Supposez que nous commencions avec les cerceaux 1 à 5 comme frontières. Compter les 6 domaines. Tracer la frontière 7. Nous pouvons toujours faire les mêmes promenades, nous avons donc encore 6 domaines. Ajoutons la frontière 8 et nous avons encore la même situation. Il en sera de même en traçant la frontière 10. Nos 6 personnes peuvent faire encore les mêmes promenades dans leurs domaines, sans être obligées de traverser une frontière. Pourrons-nous encore ajouter des frontières sans faire de nouveaux domaines ? Si oui, où pourrons-nous tracer la frontière 11 ? Qu'est-ce qui arrive si nous partons avec 4 frontières ou 6 et ainsi de suite. Peut-on découvrir une règle ?

autant un nouveau domaine ? Demandons-lui s'il peut encore aller dans tous les endroits qu'il pouvait atteindre avant, et il s'apercevra qu'il le peut, même s'il lui faut pour cela faire un détour. On a ajouté une frontière, mais sans augmenter le nombre des domaines.

On essaie alors de réunir deux autres frontières, puis une autre encore, et c'est toujours la même découverte : on a ajouté des frontières, on n'a pas augmenté le nombre des domaines, puisque chaque enfant peut encore atteindre, sans franchir aucune frontière, tous les points qu'il pouvait atteindre auparavant.

Il vient toutefois un moment où, quelle que soit la nouvelle frontière tracée, on ne peut pas éviter d'augmenter le nombre des domaines. (Le maître découvrira rapidement à quel moment cela doit se produire, mais les enfants seront intrigués, puisqu'ils croyaient avoir établi que le nombre de domaines n'augmentait pas, quelles que fussent les modifications des frontières. Il faut les laisser essayer les dessins les plus compliqués, jusqu'à ce qu'ils soient convaincus.)

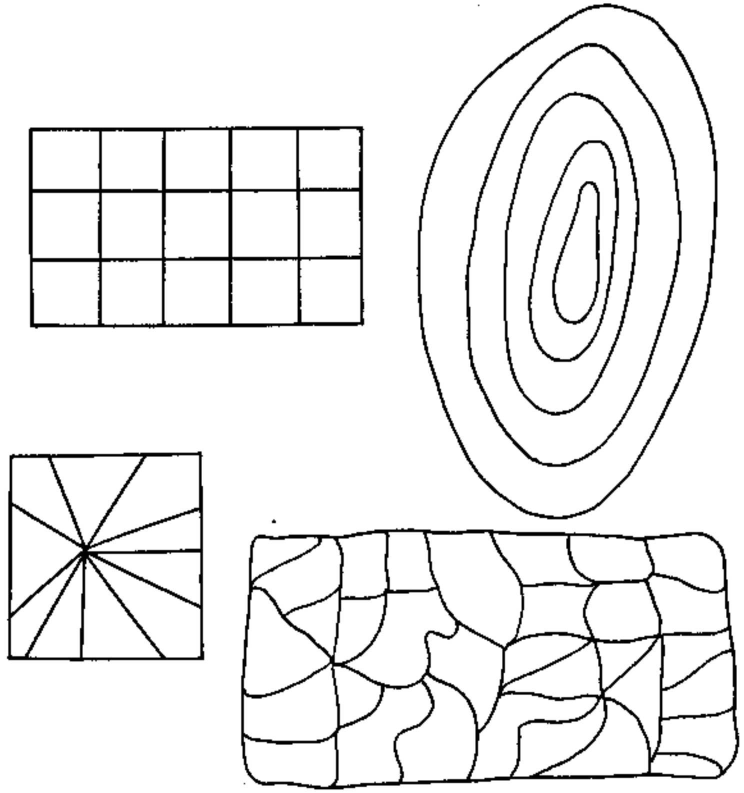
1.15 *Jeux de puzzles (ou de « patchwork »)*

Nous avons déjà décrit ce jeu ci-dessus, p. 10. Quand les enfants sont plus âgés, on peut leur faire colorier des cartes politiques, mais au niveau de la maternelle, les enfants ne savent pas encore ce qu'est une carte, et il vaut mieux leur présenter l'exercice d'une manière différente. Pour le cas où les enfants n'auraient encore rien vu de semblable, montrez-leur une robe en « patch » ou, à défaut, des illustrations de « patch » dans un journal de modes. On fait du « patch » en assemblant des bouts de tissus de diverses couleurs et en s'arrangeant pour qu'il n'y en ait jamais deux de la même couleur côte à côte, un peu comme un manteau d'Arlequin. Pour commencer, on fait tracer aux enfants, sur une feuille de papier, des frontières variées, et on leur dit de colorier les « territoires » en prenant toutes les couleurs possibles. Puis, dans un nouveau jeu, on leur demande de les colorier avec le moins de couleurs possibles, tout en veillant à ce qu'il n'y ait jamais deux pièces voisines de la même couleur. Il ne faut pas faire une pièce rouge à côté d'une autre pièce rouge, une pièce verte à côté d'une autre pièce verte, et ainsi de suite. Le gagnant est celui qui a réussi à employer le minimum de couleurs tout en respectant la règle.

Il est possible, dans ce cas, et autant qu'on puisse le savoir, de descendre jusqu'à quatre couleurs. Personne n'a encore jamais réussi à tracer un « manteau d'Arlequin » dans lequel il *fallait nécessairement* plus de quatre couleurs, mais il n'a pas été démontré que quatre couleurs seraient *toujours suffisantes.*

On peut, maintenant, demander aux enfants d'imaginer des modèles dans lesquels il n'y ait même pas besoin de quatre couleurs. Nous en avons indiqué un pour lequel il n'en fallait que deux. Voyons si les enfants peuvent en trouver un pour lequel il en faille trois.

Fig. 11 COUVERTURES FAITES DE PIÈCES ASSEMBLÉES



Combien de couleurs différentes vous faut-il pour ces couvertures sans que jamais deux pièces voisines aient la même couleur.
Pouvez-vous inventer un modèle qui ait besoin de plus de 4 couleurs ?

1.16 *Pliages de papiers*

A ce niveau, la plupart des enfants ont déjà eu l'occasion de faire des pliages. En tout cas, nous recommandons les exercices à base de pliage comme préparation à certains exercices ultérieurs. Il serait très profitable aux enfants d'acquérir empiriquement des notions de symétrie – par pliage selon un axe de symétrie (qu'ils découvriront eux-mêmes et qu'il ne s'agit aucunement pour eux d'apprendre !), en veillant à ce que les sections symétriques se recouvrent exactement.

Il ne faut pas que ces exercices soient trop compliqués, car l'expérience montre qu'à cet âge la plupart des enfants sont incapables d'un travail de précision ; si l'opération à réaliser est trop complexe, et dépend de pliages préalables précis, elle risque fort d'échouer. Une fois de plus, insistons bien sur le fait que nous recherchons, là comme ailleurs, que *l'acquisition d'un concept ait lieu par l'expérience personnelle des enfants;* les interventions de la maîtresse doivent être réduites au minimum ; l'idéal serait même que la maîtresse n'intervienne pas du tout, quelle que soit la médiocrité des réalisations des enfants.

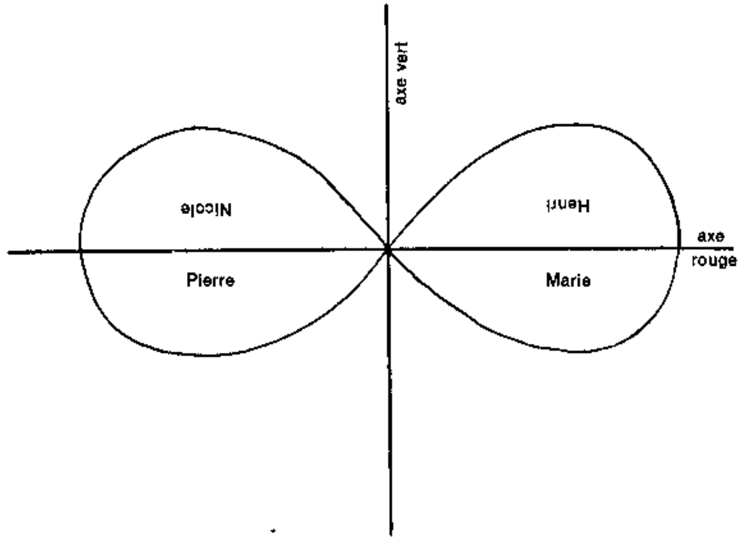
1.17 *Premier jeu de pivotement. « Où va-t-on? »*

On commence par tracer sur le sol un grand chiffre 8. Puis on trace ses deux axes de symétrie – un axe longitudinal rouge et un axe transversal vert. Cela divise le 8 en quatre sections, constituant chacune le camp de l'un des joueurs, chaque camp étant marqué au nom de son titulaire. Au centre du huit on met un cinquième enfant, le meneur de jeu, ou le pivoteur, qui tient en main une réplique en bois ou en carton du huit. Cette plaque est divisée de même en quatre camps et porte, elle aussi, les axes de symétrie, mais non coloriés. On marque la réplique de la même manière sur ses deux faces, et on s'assure qu'au commencement du jeu le meneur tient la plaque dans la même position que le dessin sur le sol. Tous les joueurs doivent en avoir conscience, et avoir eu la possibilité de s'en convaincre en vérifiant eux-mêmes.

Le pivoteur annonce qu'il va tenir la plaque par les deux extrémités de l'un des axes de symétrie (« par les deux bouts de ce trait qui est marqué dessus » – ne demandez pas aux enfants d'employer d'emblée des mots compliqués ; cela viendra plus tard) et qu'il va la faire pivoter (« la retourner »). Il exécute le mouvement lentement, et les autres joueurs ont le droit de mettre le doigt sur la partie de la plaque correspondant à leur camp et de suivre le mouvement, ou encore de tenir une ficelle fixée à la partie de la plaque correspondant à leur camp, tout cela afin de bien voir et sentir que, lorsque le mouvement est terminé, la plaque *a l'air* d'avoir la même position qu'au début, mais qu'en réalité la position de leur camp a changé. On essaie à nouveau après avoir fait changer les joueurs de place conformément au pivotement, et on recommence plusieurs fois, tantôt avec l'un des axes, tantôt avec l'autre, jusqu'à ce que tout le monde ait bien compris et soit bien convaincu.

Et maintenant, abordons le premier genre de jeux. « Où faut-il aller? » Le meneur dit : « Je vais retourner sur le rouge. Où serez vous quand j'aurai fini? » Ce disant, il tient la plaque par les deux extrémités de l'axe rouge et la fait pivoter, en s'arrangeant pour que tout le monde voie bien ce qu'il a fait, puis il la ramène à sa position initiale. Les autres joueurs doivent maintenant gagner leur nouvelle position. Il peut se faire que deux enfants veuillent occuper la même place :

Fig. 12 LE PREMIER JEU DE PIVOTEMENT



Où vais-je aller avec un « saut » rouge? Avec un « saut » vert?
Quel « saut » me conduira à la maison de ...? Quel « saut » me permettra de rentrer chez moi d'un seul coup?
Où irai-je après premièrement un « saut » vert, ensuite un « saut » rouge?
Où me conduira d'abord un « saut » rouge, suivi d'un « saut » vert?
Quelle sorte de « saut » me conduira chez moi d'un seul coup?

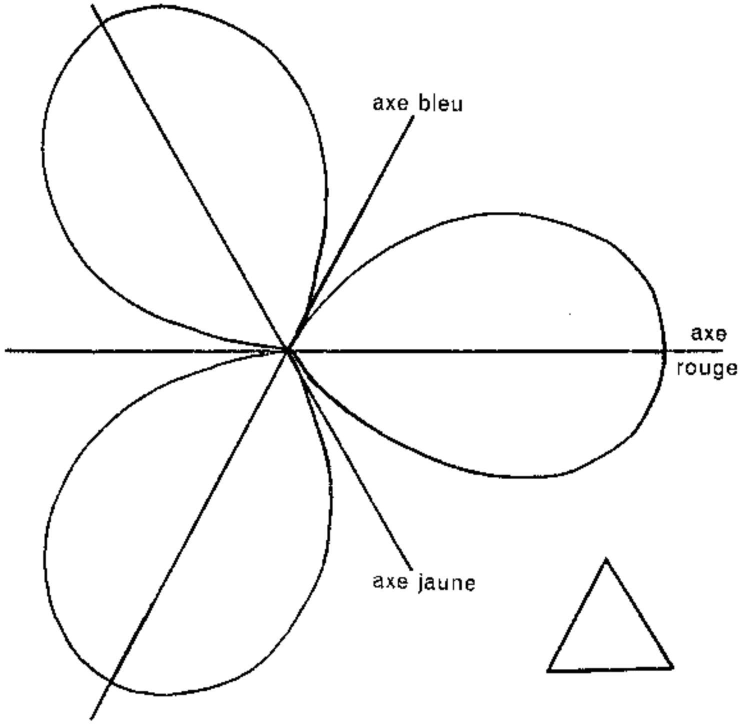
laissez-les en discuter jusqu'à ce qu'ils se soient mis d'accord. Après quoi, chacun se place et le meneur de jeu exécute une seconde fois son pivotement de plaque, puis pose la plaque à terre, au centre du huit, dans sa nouvelle position. Comme les noms des joueurs sont inscrits dans chacun des quatre « camps » de la plaque, tout le monde peut vérifier si le mouvement a été correctement exécuté. Puis chacun regagne son camp d'origine, le meneur remet la plaque dans sa première position, et on essaie un autre pivotement. On peut rendre le jeu compétitif en laissant chaque enfant qui a bien réussi prendre un jeton. A la fin de la partie, c'est le maître qui désigne le gagnant si les enfants ne savent pas encore compter.

On peut compliquer les jeux de cette série en prenant comme formes un trèfle ordinaire (3 axes de symétrie), un trèfle à quatre feuilles (4 axes de symétrie) ou toute autre figure ayant plus de deux axes, après quoi on pourra passer aux formes plus abstraites de la géométrie, carré, triangle équilatéral, rectangle, pentagone, hexagone, etc., auxquelles elles sont assimilables.

1.18 *Second jeu de pivotement. « Comment faire pour arriver là ? »*

On commence encore avec un huit tracé au sol, avec ses deux axes de symétrie, le meneur de jeu au centre avec sa plaque, et les camps inscrits au sol et sur la plaque. Cette fois, le meneur dit : « Je vais retourner la plaque, et quand je l'aurai retournée, Nicole sera à la place de Pierre. Comment faut-il que je la retourne ? Est-ce autour

Fig. 13 JEU DE PIVOTEMENT ET DE ROTATION

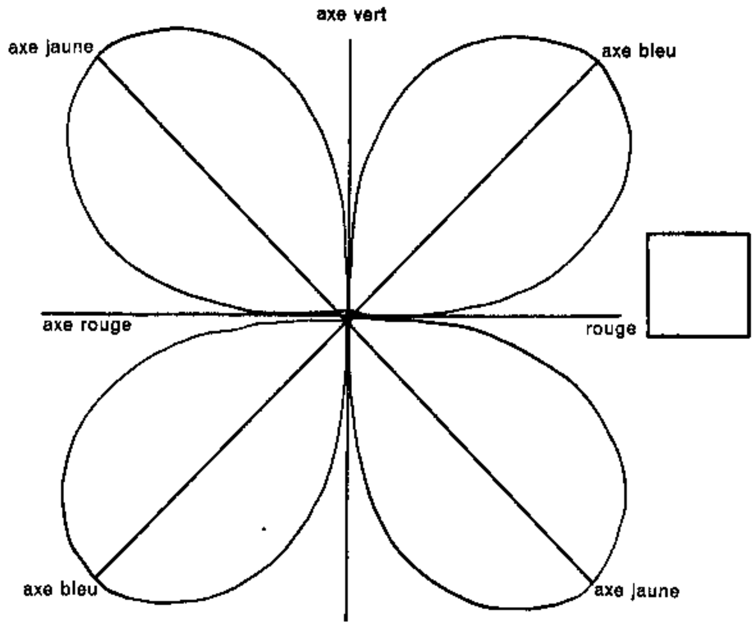


La feuille de trèfle (comme le triangle) a 3 axes de symétrie.

de la ligne rouge ou est-ce autour de la ligne verte ? » Les enfants discutent et décident, par exemple, que ce sera autour de la ligne verte. Le meneur de jeu fait comme on le lui a dit, et pose la plaque sur le sol, ce qui permet à chacun de vérifier. Si on s'est trompé, on recommence.

On peut compliquer les jeux de cette série, comme pour la précédente, en prenant des formes plus complexes. A mesure que le nombre des axes de symétrie augmente, la partie devient plus difficile.

Fig. 14 JEU DE PIVOTEMENT ET DE ROTATION



Trèfle à quatre feuilles (ou carré) avec 4 axes de symétrie.

1.19 *Troisième jeu de pivotement. « Comment retourner à la maison en un seul mouvement ? »*

Ce jeu est une combinaison des deux premiers. On commence avec le 8, et on joue d'abord à « Où va-t-on ? » Quand les joueurs ont quitté leur camp pour gagner leur nouvelle position, le meneur demande : « Et maintenant, comment faut-il que je retourne la plaque pour que vous rentriez chez vous en un seul mouvement ? » Pour le maître, il est évident que si c'est un « pivotement vert » qui les a conduits où ils sont, c'est encore un « pivotement vert » qui les ramènera au camp, mais pour les enfants ce n'est pas aussi évident. Bien entendu, avec une forme aussi simple, le jeu devient rapidement très facile, mais il n'en est pas de même avec des formes plus complexes. Aussi faut-il, là encore, essayer de compliquer peu à peu le jeu, mais il se peut que certains enfants aient besoin, pour réussir, d'une expérience dont l'acquisition nécessitera un certain temps.

1.20 *Quatrième jeu de pivotement. « Où va-t-on en deux mouvements ? »*

Une fois de plus, on prend le huit avec ses marques habituelles. Les enfants sont maintenant habitués au jeu de « Où va-t-on ? »

et ils seront très heureux de jouer à un jeu comportant deux déplacements successifs au lieu d'un. Le meneur dit, par exemple : « Je vais retourner la plaque deux fois de suite, et il faut que vous deviniez où vous serez après. Je vais la retourner d'abord sur le rouge, puis sur le vert. Allez ! » Après quelque discussion, les joueurs décident de leur nouvel emplacement. (Comme précédemment, le meneur aura montré rapidement comment il allait retourner la plaque, puis l'aura ramenée à sa position d'origine.) Les enfants exécutent le déplacement, puis le meneur fait les deux retournements « pour de vrai » et pose la plaque à terre afin que chacun puisse vérifier. En cas d'erreur, chacun regagne son camp et on recommence. Le meneur peut, bien entendu, recommencer ensuite en inversant l'ordre des couleurs de retournement. Une fois encore, on complique progressivement les formes, l'intérêt de ces complications étant à la fois d'obliger les enfants à réfléchir et de les empêcher, en raison du grand nombre de variantes, de retenir les solutions par cœur, puisqu'il ne s'agit pas d'apprendre des cas, mais d'exercer son jugement.

1.21 *Cinquième jeu de pivotement. « Comment rentrer au camp en un seul mouvement après deux retournements successifs ? »*

Quand les enfants ont bien compris où ils seront après deux pivotements successifs, on peut leur demander : « Comment faut-il retourner la plaque pour vous ramener à votre camp en un seul mouvement ? » Ce jeu se révèle souvent assez difficile pour les enfants, surtout s'ils n'ont pas assez prêté attention au retour au camp après un seul mouvement (peut-être en devinant que le mouvement à exécuter est l'inverse de celui de départ). Aussi faut-il faire plusieurs exercices, très soigneusement, avec des formes simples, afin de s'assurer que les enfants ne devinent pas « au petit bonheur », mais considèrent effectivement la forme et réfléchissent à ce qui va se passer. Ils finissent par découvrir qu'il existe un mouvement qui les ramène au camp en un seul coup. On peut imaginer, là encore, d'autres jeux en prenant des formes plus complexes.

1.22 *Sixième jeu de pivotement. La poursuite*

Cette fois, tout en conservant le dessin du 8, on ne prend que trois joueurs – un meneur de jeu, un « chasseur » et un « lapin ». Le chasseur et le lapin partent du même camp, qui sera le seul marqué. Le « lapin » dit, par exemple, au chasseur : « Je vais faire deux mouvements : un retournement rouge, puis un retournement vert. Rattrape-moi en un seul coup. » Le meneur exécute les retournements, et le « lapin » fait le déplacement. Après quoi le « chasseur » doit découvrir comment rattraper l'autre joueur en un seul coup. S'il y parvient, il a gagné.

On peut, bien entendu, continuer avec d'autres formes, et on peut, également, demander au « lapin » de retourner à son « terrier » en un seul coup. Pour cela, bien entendu, il faut qu'il exécute le mouvement inverse de celui du chasseur ; ce sera facile, s'il s'est fait attraper, mais dans le cas contraire il faudra qu'il le trouve par lui-même.

1.23 *Premier jeu de rotation. « Où va-t-on ? »*

Nous allons maintenant reprendre tous les jeux qui viennent d'être décrits, mais cette fois-ci au lieu d'exécuter des séries de basculements, on « tournera à plat », c'est-à-dire qu'on fera exécuter à la plaque des rotations dans son propre plan. Histoire de changer un peu, commençons, cette fois-ci, non plus avec un huit, mais avec un trèfle à quatre feuilles tracé sur le sol, le meneur de jeu disposant, bien entendu, d'une plaque en forme de trèfle à quatre feuilles aussi. On trace les quatre axes de symétrie, et on porte dans chacun des camps le nom du joueur auquel il est affecté.

Comme nous l'avons vu dans le texte, il y a quatre mouvements de rotation possibles – un tour complet, un demi-tour, un quart de tour à droite (nous dirons « un à-droite ») et un quart de tour à gauche (nous dirons « un à-gauche »). Pour commencer, les joueurs ont le droit de tenir la plaque pendant que le meneur la fait tourner, afin de leur faire bien sentir et comprendre que les camps ont changé de place quand la plaque a tourné, même si elle *semble* être dans la même position.

Le meneur demande alors aux joueurs : « Je vais faire un demi-tour. Où êtes-vous maintenant ? » Il montre le mouvement en l'exécutant rapidement et en ramenant la plaque à sa position première. Les enfants discutent, prennent place, le meneur exécute effectivement la rotation et pose la plaque sur le sol pour vérification. En cas d'échec, chacun retourne à son camp et on recommence. Puis on exécute un tour complet, ou un à gauche, et on change de formes, pour aboutir à des formes géométriques pures.

1.24 *Second jeu de rotation. « Comment faire pour arriver là ? »*

On prend le trèfle à quatre feuilles. Cette fois, le meneur dit : « Je vais faire tourner la plaque, et quand j'aurai fini, Michel sera à la place de Jeannot. Comment va-t-elle tourner ? » De nouveau, les enfants discutent puis répondent, par exemple : « Un à-droite » ou « Un demi-tour ». Le meneur fait tourner alors la plaque conformément à la réponse, et on vérifie si les joueurs ont bien changé de place comme prévu.

On peut recommencer avec d'autres formes. On peut également varier le jeu en disant au tourneur de n'interroger qu'un seul enfant chaque fois, ce qui rend le jeu compétitif si on l'estime opportun.

1.25 *Troisième jeu de rotation. « Comment rentrer au camp en un seul mouvement ? »*

On se sert encore du trèfle à quatre feuilles. Le meneur provoque d'abord un déplacement à l'aide d'une rotation simple et unique. Puis, quand les joueurs ont gagné leur position nouvelle, il leur demande : « Quel genre de tour faut-il faire, maintenant, pour revenir au camp en un seul mouvement ? » Il est évident que ce mouvement est l'inverse du mouvement de départ, mais les enfants ne le discernent pas toujours du premier coup, et certains y éprouvent de la difficulté. Là aussi, on peut varier le jeu en posant la question d'abord à toute l'équipe, puis à un seul joueur à la fois. On peut également employer des formes différentes, et changer la position initiale des joueurs, pour varier les perceptions.

1.26 *Quatrième jeu de rotation. « Où va-t-on en deux mouvements ? »*

On se sert, toujours, du trèfle à quatre feuilles. Cette fois, le tourneur dit aux joueurs : « Je vais faire un demi-tour, puis un à-droite. Où serez-vous alors ? » Les joueurs réfléchissent, discutent, le cas échéant, puis prennent position. Le tourneur exécute la première rotation, fait une pause, puis exécute la seconde rotation et, enfin, pose la plaque sur le sol dans sa nouvelle position. Les joueurs vérifient leur position en regardant leur nom sur la plaque. S'ils se sont trompés, ils regagnent leur camp et essaient de recommencer.

1.27 *Cinquième jeu de rotation. « Comment rentrer au camp en un seul mouvement après l'avoir quitté en deux mouvements successifs ? »*

Les joueurs se placent dans leurs camps d'origine, puis le tourneur joue à « Où va-t-on en deux mouvements ? », jeu auquel, en principe, les joueurs ont eu le temps de s'habituer. Quand ils auront gagné leur position, le tourneur demande : « Et maintenant, comment faut-il que je tourne ma plaque pour que vous reveniez au camp en un seul mouvement ? » Les joueurs en discutent entre eux et donnent la réponse (par exemple : « Fais un à-droite »). Le tourneur exécute la rotation et pose la plaque sur le sol. Il est facile, alors, de voir si la réponse était juste, car si elle ne l'était pas, les noms des joueurs ne seront pas en face de leurs camps respectifs. Il faudra alors recommencer.

1.28 *Sixième jeu de rotation. La poursuite*

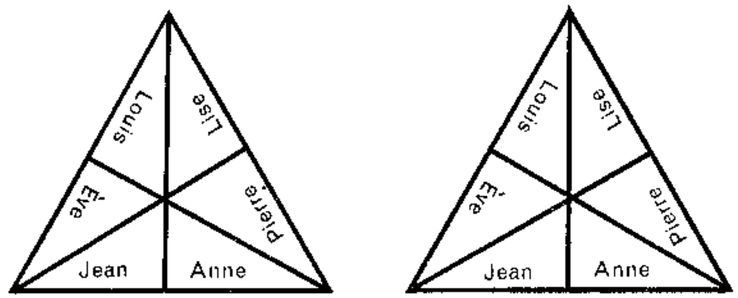
Ce jeu se joue comme celui qui a été décrit plus haut en 1.22. Le « lapin » décide, par exemple, de faire d'abord un quart de tour à

gauche, puis un demi-tour, et il faut ensuite que le chasseur le rattrape en un seul mouvement ; celui-ci sera, bien entendu, un quart de tour à droite. Si le « lapin » doit rentrer à son terrier en un seul mouvement, ce sera par un mouvement inverse de celui du chasseur, donc par un quart de tour à gauche.

On peut poursuivre, dans cette série, en prenant d'autres formes, et en ne manquant pas d'étudier, notamment, les effets du tour complet (qui équivaut à l'absence de tout mouvement).

Tous les jeux dont il vient d'être question ci-dessus peuvent se jouer avec deux figures superposées. Par exemple, on fait deux triangles

Fig. 15



L'un des triangles sera marqué sur ses deux faces (c'est-à-dire au recto et au verso, en veillant bien à ce que les inscriptions portées au verso soient exactement en dessous des inscriptions correspondantes portées au recto) tandis que l'autre ne portera d'inscriptions que sur une seule face ; on peut d'ailleurs se contenter de le dessiner par terre, puisque ce sera le triangle témoin, fixe, tandis que le premier sera mobile. Grâce à ces deux figures, au lieu de faire déplacer les enfants, on peut se contenter de leur faire deviner la position du triangle, et les vérifications se font en superposant les deux triangles.

On peut, naturellement, faire de même avec d'autres figures : carrés, rectangles, losanges, chiffres 8, trèfles à 3 ou à 4 feuilles, etc., pour bien faire comprendre aux enfants qu'on peut jouer aux mêmes jeux avec des figures très différentes.

Nous nous permettons de souligner une fois encore que si nos jeux sont indiqués dans un certain ordre, c'est uniquement parce que nous n'avons pas pu faire autrement ; mais il n'y a aucune nécessité de s'en tenir rigidement à cet ordre. En fait, on peut très bien, par exemple, combiner très vite pivotements et rotations, d'autant plus que c'est parfois nécessaire : ainsi, le mouvement équivalent à deux pivotements successifs autour de deux axes de symétrie différents n'est pas un pivotement autour d'un axe de symétrie mais une rotation dans le plan (1.21 ci-dessus).

Il existe, cependant, du point de vue psychologique, un certain ordre dans la succession des constructions mentales, entre les jeux état-opérateur-état et les jeux opérateur-opérateur-opérateur. Les jeux de « Où va-t-on? » et de « Comment arriver là? » sont des jeux état-opérateur-état. Dans le jeu « Où va-t-on? » on a un premier état et l'opérateur qui agit sur cet état, et la question est de savoir quel état on obtient quand un certain opérateur agit sur un certain état. Dans le jeu « Comment arriver là? » on donne l'état initial et l'état final, et la question est de savoir quel est l'opérateur qui produit ce changement d'état. Ces deux jeux sont le contraire l'un de l'autre.

Le troisième jeu, « Comment revenir au camp en un seul mouvement? » est manifestement un jeu d'inverses, puisque, pour rétablir la situation initiale, à savoir celle d'être au camp, il faut exécuter le mouvement inverse de celui qui avait été nécessaire pour quitter le camp. C'est déjà, là, poser une question sur le mouvement lui-même. Tout mouvement, dans les jeux que nous avons décrits, comporte un mouvement inverse. La compréhension des propriétés des inverses conduit à une meilleure compréhension des relations entre l'addition et la soustraction, et plus tard entre la multiplication et la division.

L'étape suivante consiste à rechercher l'effet de deux mouvements consécutifs dans une situation particulière, c'est-à-dire à se demander, en présence d'un état initial connu, quel sera l'état final après application de deux opérateurs successifs.

Ce n'est pas le quatrième, mais le cinquième type de jeux de rotation qui conduit à la généralisation de cette étape. Dans les jeux de poursuite, ce qu'on recherche, c'est le *déplacement équivalent*, correspondant à deux mouvements consécutifs donnés. Les enfants ne se rendront compte de l'équivalence que lorsqu'ils verront que, *quelle que soit la situation au départ*, le chasseur recourt toujours à un certain mouvement pour rattraper le lapin, du moment que le lapin a exécuté certains mouvements, au nombre de deux, dans un certain ordre. Plus exactement, si le lapin exécute les deux mouvements A, B, dans cet ordre, le chasseur fera toujours le même mouvement unique, C, pour rattraper le lapin, quel qu'ait été le point de départ de la chasse. C'est pourquoi, d'ailleurs, il est bon de jouer au jeu de la poursuite de telle manière que toute succession donnée de deux mouvements du lapin soit exécutée à partir de tous les points de départ possibles de la chasse.

Ce n'est qu'après qu'on pourra se demander si l'ordre dans lequel le lapin exécute ses mouvements exerce une influence sur le mouvement du chasseur. On découvrira ainsi que dans les jeux à quatre positions (huit, trèfle à quatre feuilles, carré), cet ordre n'a aucune importance. Par contre, s'il s'agit des rotations ou des pivotements d'un triangle équilatéral, l'ordre est déterminant, et peut-être les enfants trouveront-ils là leur première expérience concrète de situations dans lesquelles l'ordre d'intervention des opérateurs affecte le résultat.

Deuxième partie

PRATIQUE DE LA MESURE

1. EXERCICES PRÉLIMINAIRES

Les faits, les événements qu'on observe dans la nature peuvent, d'un certain point de vue, être classés en deux catégories : ceux qui sont *continus*, ceux qui sont *discontinus*. Par exemple, quand on compte combien il y a de pommes dans un panier, le passage d'une pomme que l'on compte à la suivante n'est pas continu. Il en est de même des pas que l'on fait sur un chemin, car il n'y a aucun pas entre le premier et le second, entre le second et le troisième : chacun suit l'autre, en succession régulière. Par contre, beaucoup de phénomènes de la nature nous apparaissent comme continus : l'écoulement du temps, la croissance d'une plante, les déplacements dans l'espace, etc. La mesure ou le comptage d'événements discontinus n'offrent que peu de difficultés, mais il n'en est peut-être pas de même des événements continus. Comment mesurer la croissance? Comment savoir qu'une chose est plus grande qu'une autre? Comment mesurer la fuite du temps?

Naturellement, l'enfant résout souvent ces questions d'un simple regard. Il voit bien que la maîtresse est plus grande que lui, et il n'y trouve aucune difficulté. Il n'a aucun besoin de mesurer la maîtresse ; surtout quand il est tout jeune, il se tire de situations de ce genre à l'aide de ses sens, uniquement. L'analyse ne lui est pas nécessaire.

Il vient un moment, toutefois, où la nécessité d'une mesure se fait sentir – mesure de la distance, mesure de la capacité, mesure du poids, etc. C'est de ce genre de mesures que nous traiterons ici.

Comment compare-t-on deux poids, par exemple? Il est facile à un enfant de vous dire qu'un livre est plus lourd qu'un autre, s'il peut en éprouver le poids avec les mains. Mais si on lui donne deux livres qui ont à peu près le même poids, il aura du mal à trancher. Il se peut qu'il réponde : « C'est peut-être celui-ci! » ou « Je ne sais pas. » Dans un tel cas, il n'y a qu'une manière de résoudre la difficulté, c'est de recourir à la mesure. Pour mesurer une quantité qui change de manière continue, on choisit une quantité unitaire arbitraire, et on mesure la croissance, la variation, en fonction de cette quantité unitaire choisie.

Distance

Supposons qu'on veuille mesurer la distance entre deux murs opposés de la classe : on peut, si l'on veut, prendre un livre, n'importe quel livre, et voir combien de fois on peut le poser sur le sol entre les deux murs ; la distance sera de « tant de livres ». Ou, mieux encore, on peut prendre les cahiers des enfants, s'ils sont tous du même modèle, et les poser bout à bout entre les deux murs. On compte ensuite le nombre de cahiers et on a la distance. Mais c'est déplacer le problème, c'est provoquer la question qu'un enfant pourrait très bien poser : « Et un cahier, c'est long comment ? » Il faut alors trouver une unité plus petite pour mesurer le cahier ; on peut chercher, par exemple, combien un cahier « fait » de boîtes d'allumettes, et en déduire, même, la longueur de la classe en boîtes d'allumettes. Mais « quelle est la longueur d'une boîte d'allumettes ? » On peut la mesurer avec des pièces d'un centime, et ainsi de suite. C'est évidemment là la plus petite unité pratiquement utilisable pour mesurer la longueur. Et si on veut que le résultat obtenu soit utilisable par d'autres, qui n'ont pas assisté à l'opération, il est non moins évident qu'il faut que l'unité choisie soit nettement définie et acceptée par tous ceux qui, eux aussi, veulent mesurer la longueur.

Temps

Même chose en ce qui concerne le temps. Supposons qu'on veuille savoir combien de temps il faut à quelqu'un pour faire un certain travail, son devoir, par exemple. Il faudra se servir d'un procédé quelconque de mesure du temps. Supposons qu'on prenne un sablier. On le retourne au moment où le travail commence et, chaque fois que le sable a fini de s'écouler, on le retourne de nouveau. En définitive, le nombre de fois qu'on l'a retourné constitue une mesure du temps mis à exécuter le travail. Mais, là encore, la question ne manquera pas d'être posée : « Et le sable, il lui faut combien de temps pour s'écouler ? » Il faut, alors, trouver une unité de mesure plus petite. On peut, peut-être, laisser un robinet couler goutte à goutte, ou frapper du pied sur le sol en cadence, et dire qu'il faut « tant » de gouttes pour qu'un sablier se vide. Mais alors, quelqu'un pourra demander combien de temps il y a entre deux gouttes, etc.

Poids

Et c'est encore la même chose avec le poids. De combien un objet est-il plus lourd qu'un autre ? On peut, par exemple, mettre un objet sur un plateau d'une balance et l'autre sur l'autre plateau, et compter les objets qu'on ajoute pour établir l'équilibre entre les deux plateaux. Prenons, par exemple, des clous moyens de 5 cm de longueur et supposons qu'il ait fallu cinq clous dans l'un des plateaux pour rétablir l'équilibre. On peut dire que l'objet le plus lourd est « plus lourd de cinq clous » que le plus léger. Mais alors, quelqu'un peut demander : « Et le plus léger, il est plus lourd que les clous de combien ? » ou « Il est plus lourd qu'un clou de combien ? » On peut répondre en posant un clou dans un des plateaux, l'objet léger dans l'autre, puis ajouter des clous dans le premier plateau jusqu'à obtention de l'équilibre. Mais il peut se faire qu'on n'arrive pas à trouver la différence ; il se peut qu'après avoir mis dix clous dans le premier plateau, la balance penche encore du côté de l'objet, qui est dans le second plateau, et que si on ajoute un clou de plus dans le premier plateau, la balance penche de l'autre côté. On pourrait alors dire que ces clous ne font pas bien l'affaire, et en prendre des plus petits, ou des pièces d'un centime, ou tous autres objets égaux entre eux quant au poids et en fonction desquels on puisse mesurer le poids.

Il faut donner aux enfants l'occasion de découvrir que les unités qu'ils utilisent pour mesurer des quantités à variation continue sont tout à fait arbitraires. Il n'y a, mathématiquement, aucune différence entre l'utilisation de clous pour mesurer le poids d'une noix de coco et l'utilisation, à cette même fin, de poids du système métrique. Naturellement, pour des raisons d'ordre social, il est nécessaire de disposer d'un système unifié de mesures de poids, de longueur ou de temps. Si, en effet, on disait à quelqu'un : « Venez quand j'aurai tapé par terre deux mille fois », cette personne arriverait plus ou moins tard suivant qu'on aurait tapé plus ou moins vite. De même pour les clous. On ne manquerait pas de demander de quelle sorte de clous il s'agit. Aussi a-t-on créé un système normalisé de mesures de longueur, de poids, de capacité, de temps. Mais ce qu'il faut bien voir, c'est qu'à l'origine, ces mesures ont été choisies tout à fait arbitrairement.

2. DÉCOUVERTE DE LA MESURE

Considérons d'abord la mesure des distances. Comme il est souhaitable d'utiliser toutes sortes de longueurs arbitraires, pour bien mettre en lumière leur caractère arbitraire, il faut prévoir des quantités assez importantes de baguettes de bois de différentes longueurs, à l'entière discrétion du maître. Par exemple, on pourra prendre des unités de 10 cm de longueur, d'autres de la longueur de la chaussure de Marie-Jeanne, et ainsi de suite.

Après avoir choisi l'unité arbitraire de mesure qu'on va utiliser, on peut en prendre une cinquantaine d'exemplaires, emmener les enfants dans la cour et y disposer deux pierres à une certaine distance l'une de l'autre. Puis on demandera aux enfants combien de baguettes de bois on pourrait placer bout à bout entre les deux pierres. Ce sera pour eux une première expérience d'estimation des longueurs. Un enfant dira : « Dix », d'autres : « Vingt-cinq », d'autres encore : « Trois. » Les jeunes enfants n'ont aucune idée de la longueur en fonction d'une autre longueur tant qu'ils n'en ont pas acquis une certaine pratique ; aussi pourra-t-on jouer un jeu de groupe, chaque enfant devant, à son tour, deviner combien il y a d'unités d'une pierre à l'autre. Une fois notées toutes les estimations, on vérifie en posant les baguettes de bois en ligne... aussi droite que possible, bout à bout, et on compte. Celui qui a deviné le plus près de la vérité prend les deux pierres, va les poser ailleurs, et on recommence la partie. Il faut jouer ces jeux avec des unités différentes.

On peut naturellement organiser des jeux semblables dans la salle de classe et poser des questions assez différentes, comme : « Si on mettait cette armoire entre la fenêtre et le tableau, est-ce qu'il y aurait assez de place pour la mettre ? » ou encore « Est-ce qu'il reste de la place pour mettre une chaise entre ces deux armoires ? » Pour la chaise, on peut en décider en essayant, mais pour l'armoire, c'est plus difficile, et les enfants découvrent l'intérêt et l'utilité de la mesure. La condition pour y parvenir, c'est de toujours choisir des situations qui aient un sens pour eux.

Après avoir ainsi joué avec des unités arbitraires, les enfants les échangeront contre des unités correspondant à des unités légales, décimètre, mètre, ou encore verge, pied et pouce, et recommenceront tous ces jeux. On peut alors leur demander combien ils peuvent mettre de baguettes d'un mètre, ou d'un décimètre, entre les deux pierres. Au bout d'un certain temps, ils saisiront qu'il y a une relation entre ces unités, qu'il y en a une qui est dix fois (ou trois fois) plus longue que l'autre. On peut aussi introduire des longueurs d'un centimètre, peut-être même des centimètres carrés découpés dans du linoléum ou dans du bois, et ce sera particulièrement instructif si, par exemple, les règles et réglettes d'un mètre et d'un décimètre ont été découpées dans du matériau d'un centimètre de largeur.

Jusqu'à présent, toutefois, les mesures n'ont été effectuées qu'avec une seule et même unité de longueur chaque fois, en mettant bout à bout des éléments de cette unité et en comptant ensuite ces éléments. Les enfants ont compris qu'on a remplacé ces diverses mesures arbitraires par quelques mesures « spéciales » dont on leur aura donné les noms sur leur demande.

Mais les enfants vont sans doute découvrir alors que certaines longueurs ne sont pas exactement mesurables en fonction de l'unité utilisée, et ils ne se sentiront pas satisfaits d'avoir laissé, au bout, une certaine longueur qu'ils n'ont pas pu mesurer. Il est bon que ce petit problème se pose de lui-même à l'occasion d'une mesure effectuée avec des règles d'un mètre (ou d'une verge) : les enfants ne seront pas longs à s'apercevoir qu'on peut se servir des décimètres ou des pieds pour « remplir le trou ». Et si les décimètres (ou les pieds) n'y suffisent pas, ils recourront aux morceaux d'un centimètre (ou d'un pouce), de sorte que peu à peu se construira la notion de mesure effectuée d'abord avec des unités de grandes dimensions, puis avec des unités de plus en plus petites.

Au stade suivant se forme l'idée de mesure sans recourir à un si grand nombre de pièces unitaires. La maîtresse pose deux pierres

à un nombre rond de mètres de distance l'une de l'autre et demande aux enfants : « Est-ce que vous pouvez mesurer la distance entre ces deux pierres avec une seule mesure d'un mètre ? » La solution de ce petit problème demande parfois un certain temps, mais habituellement, il y a quelques enfants, plus doués, qui se mettent à essayer. On verra que l'idée leur vient très vite de poser la règle sur le sol, de faire une marque, de reporter la règle, de refaire une marque, et ainsi de suite, puis de compter le nombre de marques pour savoir combien ils ont posé de mètres. L'étape suivante consiste à compter les mètres au fur et à mesure, plutôt que de se fier aux marques faites sur la règle ou sur le sol. On passera ensuite assez facilement du mètre au décimètre et aux centimètres.

Bien entendu, on ne peut pas faire mesurer les enfants tant qu'ils ne savent pas compter et qu'ils n'ont pas acquis au moins cette notion élémentaire du nombre qui découle de l'addition. Une fois maîtrisée l'addition des nombres, on peut aussi, bien entendu, procéder à des additions de longueurs ou d'expressions de cette longueur en fonction de diverses unités. Par exemple, supposons que les enfants, mesurant la distance entre deux arbres de la cour, aient trouvé sept barres d'un mètre, neuf barres d'un décimètre et quinze pièces d'un centimètre[1]. (Et c'est ce qui arrive assez souvent dans la réalité avec de jeunes enfants !) Si on les encourage à recommencer, il se peut qu'ils découvrent qu'on peut remplacer dix des quinze bouts d'un centimètre par une réglette d'un décimètre, ce qui fait, entre les deux arbres, sept mètres, dix décimètres et cinq centimètres. Un autre enfant remarquera peut-être que si on a dix baguettes d'un décimètre on peut les remplacer par une baguette d'un mètre, de sorte que, finalement, ils aboutiront à huit mètres, pas de décimètres et cinq centimètres. Il faut, bien entendu, de nombreux exercices avant que les enfants saisissent pleinement l'équivalence entre une longueur exprimée d'une certaine manière et la même longueur exprimée d'une autre manière. C'est d'ailleurs une activité qu'il faut, autant que possible, mener de pair avec celle des échanges avec des blocs multibases. (Voir : *Ensembles, Nombres, Puissances*.)

Il ne faut cependant pas s'attendre à ce que les enfants soient déjà capables de se servir d'un double-décimètre gradué d'écolier sans la moindre aide. La plupart de ces instruments sont trop finement gradués pour de jeunes enfants et il vaut mieux commencer avec des règles graduées seulement en centimètres ou en pouces. Les enfants se trouveront ainsi conduits à découvrir le lien entre ces graduations et les baguettes isolées d'un centimètre ou d'un décimètre. Il est très important, d'ailleurs, d'utiliser des décimètres ayant juste un décimètre de long, ce qui n'est généralement pas le cas des instruments vendus dans le commerce, qui sont presque toujours plus longs.

1. Ou encore onze baguettes d'une verge, deux d'un pied et dix d'un pouce. (Nous donnons ces mesures pour nos lecteurs canadiens.)

Nous avons décrit avec beaucoup de détails tout le processus d'acquisition de la notion de mesure de longueur. Il faut passer par les mêmes étapes en matière de surface ou de volume.

3. MESURE DU TEMPS

L'estimation du temps constitue également une activité importante. Nous avons déjà parlé du sablier, et il est bon de recourir à d'autres moyens analogues avant d'aborder les pendules et les montres, par exemple à la « *bougie d'horloge* ». Elle est très facile à réaliser. Il suffit de prendre une bougie très mince, qui brûle vite, et d'y marquer des graduations espacées d'un centimètre. On peut aussi taper du pied, compter les gouttes qui tombent du robinet, et ainsi de suite, peu importe ; c'est au maître d'en décider, mais ce qui est important, c'est qu'il adopte au moins deux moyens différents. Il faut insister aussi sur le fait que la mesure du temps, comme celle des longueurs, commence par l'emploi d'unités arbitraires.

Des unités arbitraires on passe à l'emploi des secondes et des minutes, qui sont d'ailleurs des unités usuelles de mesure déjà connues des enfants, car elles font partie de leur univers quotidien. Il est très utile, dans une classe maternelle, d'avoir un chronomètre : on s'aperçoit avec un peu de pratique que les enfants sont tout à fait capables d'évaluer le temps à une ou deux secondes près. Si les adultes n'y parviennent pas toujours, c'est plutôt faute de pratique qu'en raison d'une difficulté inhérente à l'opération. Comme pour la mesure des longueurs, il faut donner à la mesure du temps une motivation : ainsi minutes et secondes pourront prendre un sens si elles sont utilisées pour mesurer la durée d'une tâche exécutée par les enfants. Par exemple, on peut mesurer combien il faut de temps à un enfant pour faire le tour de la classe, ou tout autre circuit à l'intérieur de l'école. Par exemple, on les fera aller, à tour de rôle, jusqu'à la porte, puis dans le couloir, jusqu'à la porte de la classe suivante, et revenir au point de départ, en mesurant chaque fois le temps qui s'est écoulé. Très tôt, les enfants remarquent que certains marcheurs mettent plus de temps, d'autres moins, et cette constatation conduit à la notion de vitesse. Mais il faut beaucoup d'expériences avant que les enfants comprennent que quand on marche plus vite on met moins de temps, et que quand on marche moins vite on met plus de temps. A ce sujet, un bon exercice consiste à tracer une piste de course sur laquelle les enfants peuvent d'abord marcher normalement, puis marcher vite, puis courir, puis courir de toutes leurs forces, en mesurant chaque fois le temps. A l'aide d'expériences de ce genre, les enfants se font une idée de ce qu'est la mesure de la vitesse – telle distance couverte dans tel temps –, et on peut, par exemple, adopter comme unité de vitesse le nombre de mètres parcourus en tant de secondes, ce qui a beaucoup plus de sens que le nombre de kilomètres par heure. Un enfant de cet âge ne fait jamais cinq à six kilomètres à la fois, et, en tout cas,

une heure est une durée beaucoup trop longue pour commencer ; si on veut procurer des expériences accessibles aux enfants de la maternelle ou du cours préparatoire, il faut leur faire mesurer en mètres par seconde la vitesse à laquelle ils peuvent marcher.

Un autre excellent exercice, qui peut aider les enfants à acquérir de l'expérience dans l'estimation et la mesure du temps, peut être réalisé avec un plan incliné. Il faut disposer d'une planche assez longue, inclinée sous un certain angle, qu'on ne mesurera pas, mais qui sera connu du maître ; on y fera descendre des objets ronds, en mesurant le temps qu'il faut à chacun pour arriver en bas. Quand on modifie la pente, il faut le faire d'une manière très visible pour les enfants. Après l'avoir ainsi modifiée, on y fait à nouveau rouler des objets. On mesure les temps, et les enfants découvrent qu'il faut plus de temps aux objets pour faire leur parcours si la pente est faible, et moins de temps si elle est forte.

Comme dans le cas des mesures de longueurs, surtout si on se sert d'un chronomètre à poussoir, les enfants découvrent les relations entre secondes et minutes, ces deux unités étant l'une et l'autre dans les limites de leur capacité d'attention. Cependant, le nombre « 60 » est trop grand pour être saisi de manière immédiate, et il ne faut pas compter l'employer, sauf avec les enfants les plus doués.

Quant à l'unité de mesure qu'est le « jour », elle est accessible aux enfants, si l'on s'en sert pour mesurer l'accomplissement d'une tâche : un dessin que François a terminé en trois jours et Henri en quatre jours, etc. On note chaque jour consacré à l'accomplissement d'une tâche. Par contre, il s'établit souvent une confusion dans leur esprit, à ce stade, entre la « semaine scolaire » de cinq jours et la semaine complète de sept jours. Aussi est-il peut-être préférable de renvoyer au moins à la seconde année d'école toute considération de relations entre les jours et la semaine.

4. MESURE DE LA CAPACITÉ

On peut aborder les mesures de capacité de manière analogue. Il faut plusieurs récipients différents dans lesquels on puisse mettre de l'eau ; ils seront d'ailleurs de différentes formes. Nous avons débuté avec des bouteilles et flacons de diverses tailles, essentiellement parce qu'il est facile de se les procurer : bouteilles d'un litre, bouteilles de trois quarts, d'un demi-litre, petits flacons de pharmacie de diverses contenances et même, avec un peu de chance, grandes bouteilles de deux litres d'eau de javel, magnums de champagne, etc. On peut les marquer A, B, C, D, E par ordre de contenance (pour commencer, on les traitera comme des mesures arbitraires) et, en même temps, utiliser des casseroles, des poêles à frire, des moules à tarte et autres récipients plats, car il est essentiel pour les enfants d'acquérir de l'expérience avec des récipients de même capacité mais de forme différente. Là encore, on commence par des estimations, en prenant les différentes bouteilles et en demandant aux enfants d'évaluer, par exemple, combien il y a de « bouteilles A » dans la « bouteille E ». Même avec un entonnoir, l'exercice est difficile pour les jeunes, qui répandent beaucoup d'eau et, parfois, ne savent plus où ils en sont. Il devient encore plus difficile si on dit à l'enfant de remettre dans de plus petites bouteilles l'eau qui vient d'être versée dans la grande, afin de vérifier, par comptage, la réponse précédente. En fait, il faut un certain temps aux enfants pour admettre que cette opération inverse constitue bien une contre-épreuve. Il faut donc répéter assez souvent tous ces exercices : remplir un grand flacon avec des petits, reverser dans les petits le contenu du grand. Il faut, aussi, faire verser le contenu d'une bouteille dans une casserole ou dans un récipient plat de même capacité (car les enfants, on le verra, ont tendance à se figurer qu'un récipient haut contient plus de liquide qu'un récipient de faible hauteur, même après avoir versé la même quantité de liquide dans les deux).

A partir des unités arbitraires, les enfants passeront aux « litres » et autres mesures conventionnelles, et ne mettront pas longtemps à saisir les relations qui existent entre elles. On utilisera les concepts nombres dont ils disposent déjà d'une façon sûre.

Il est très intéressant de faire des exercices d'estimation de volume, car ils conduisent à la notion, extrêmement importante, de conservation de la quantité. Les enfants auront l'occasion de voir qu'il peut y avoir autant d'eau dans un récipient large et plat que dans un récipient haut et étroit et que le volume de l'eau ne dépend pas de la manière dont elle est répartie. Au début, les enfants ont de la peine à le comprendre, mais on peut se demander si cela ne vient pas simplement du fait qu'ils n'ont jamais eu l'occasion de faire des expériences de ce genre. Si les enfants font et refont des exercices à ce sujet, versant toujours la même quantité d'eau dans des récipients de diverses formes et de diverses tailles, ils se rendent compte que c'est la même eau, et qu'il ne peut pas y en avoir plus dans le récipient haut et étroit que dans le récipient large et plat. Ou alors, il faudra leur demander d'où elle vient, s'il y en a plus.

5. MESURE DU POIDS

On introduira la mesure du poids en suivant la même progression. Pour commencer, on fera porter deux objets de poids sensiblement différent ; on fera évaluer quel est « le plus lourd » ou « le plus léger » ou s'ils sont « pareils ». Tout cela dépendra, bien entendu, de la manière dont les concepts de comparaison auront été acquis antérieurement par le moyen des jeux de formation de concepts. S'ils ne l'ont pas été encore, les premiers jeux sur les poids contribueront à les introduire. Puis on présentera la balance ordinaire, avec ses deux plateaux, et, pour commencer, on y mettra des objets de même poids, pour montrer que le fléau reste à l'horizontale. Puis on prendra deux objets de poids

nettement différent – et dont les enfants auront eu l'occasion d'apprécier la différence en les prenant dans les mains. On les mettra sur les plateaux de la balance, qui penchera d'un côté : il faudra alors laisser les enfants reprendre eux-mêmes les objets sur les plateaux pour sentir si c'est le plus lourd ou le plus léger qui fait pencher la balance. Puis on inversera les objets, et les enfants verront que c'est encore l'objet le plus lourd qui est en bas.

Vient ensuite une étape essentielle, celle où, avec deux objets de poids inégaux, on s'efforce de rétablir l'équilibre, ce qui revient à chercher *de combien* l'un est plus lourd que l'autre. On prendra des clous, ou des pièces d'un centime, peu importe, et on comptera ces unités arbitraires de poids pour mesurer la différence. A ce stade, certains enfants particulièrement doués se rendront compte qu'ils ont mesuré la différence de poids entre les deux objets, mais qu'ils n'ont pas mesuré le poids des objets eux-mêmes, et ils demanderont à le faire. Nous avons constaté, quant à nous, que nos enfants aimaient tenir les objets à la main et estimer combien ils représentent de clous ou de piécettes de monnaie – parfois, même, ils gardent l'objet dans une main tandis qu'avec l'autre ils ramassent des clous et soupèsent jusqu'à ce qu'ils croient avoir trouvé le même poids. Puis ils mettent l'objet dans un des plateaux et l'ensemble de clous ou de pièces dans l'autre, et s'il n'y a pas équilibre, ils ajoutent ou retirent des clous jusqu'à ce que le fléau soit « bien droit ». Bien entendu, puisqu'on est au stade des unités arbitraires, il n'y a aucune raison de ne pas prendre des unités plus petites, comme des clous de tapissier, par exemple. On leur fait peser ainsi quantité d'objets variés, choisis, pour que l'expérience ait toute sa signification, dans leur entourage immédiat.

L'étape suivante consiste à leur faire équilibrer l'objet d'abord avec des gros clous, puis avec des petits. Cela fait, la maîtresse demande : « Qu'est-ce qui est plus lourd, votre ensemble de gros clous ou celui de petits clous ? » ou encore « Quel est le tas de clous où il y a le plus de fer ? Le tas de gros clous ou le tas de petits ? » Et alors, bien que les enfants aient « pesé » le même objet avec les gros clous et avec les petits, on s'aperçoit qu'ils répondent, presque toujours, qu'il y a plus de fer dans les gros, qu'ils sont plus lourds. Le moment est donc venu de peser l'un des ensembles de clous avec l'autre, pour qu'ils constatent qu'ils ont le même poids. Tout cela a été fait avec des « unités » arbitraires de poids.

Il est temps maintenant d'introduire les unités légales. On remplace donc les tas de clous par des tas de poids de 1 gramme ou de 1 once. On procède comme auparavant, mais les enfants savent que, cette fois, tous les poids sont pareils. On se met à peser, mais les enfants savent qu'il n'y a plus, désormais, des « petits grammes » ou des « grands grammes » comme il y avait des petits clous et des grands clous. On pèse donc avec des grammes, jusqu'à ce que la maîtresse présente des poids de dix grammes et que les enfants découvrent d'eux-mêmes que ces derniers peuvent remplacer chacun dix poids d'un gramme.