DANS LA MÊME COLLECTION :

I. *Logique et jeux logiques*
III. *Exploration de l'espace et pratique de la mesure*

A PARAÎTRE :

Les Fractions (avec fiches de travail)
La Géométrie des transformations (avec fiches de travail)
Algèbre linéaire (avec fiches de travail)

Les premiers pas en mathématique

II

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

par
Z. P. DIENES et E. W. GOLDING

O. C. D. L.
65, RUE CLAUDE-BERNARD – PARIS 5e

Le texte original de cette initiation à la mathématique a été publié sous le titre *First Years in Mathematics:* Sets, Numbers and Powers, par l'O. C. D. L. pour ESA, Harlow (Essex), Grande-Bretagne et Herder and Herder, New York.
Le texte anglais a été traduit et adapté par Jean Confida.

Première Partie

ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES

1. ENSEMBLES

1.1. *Introduction aux ensembles*

Beaucoup de maîtres doivent encore se demander pourquoi il faudrait étudier les ensembles pour étudier les nombres. Disons alors que cette étude est nécessaire parce qu'en voulant faciliter une meilleure compréhension du concept de nombre dans l'apprentissage de l'enfant, il faut que la voie qui y conduit permette de découvrir les différents aspects de ce concept.

Dans notre monde moderne, il nous faut aider les jeunes à comprendre comment les choses s'emboîtent les unes dans les autres, car le monde augmente très rapidement en complexité et il faut ajuster entre elles des situations de plus en plus complexes. Le nombre n'y fait pas exception. Le nombre est un concept très complexe et, pour apprendre à adapter entre eux les éléments conceptuels qui le constituent, il faut d'abord connaître ces éléments. L'un de ces éléments, c'est la notion d'ensemble. Les nombres sont des propriétés des ensembles. Par exemple, le nombre 2, le nombre 3, ou tout autre nombre, ne peuvent pas être appliqués à des objets uniques. Il est dépourvu de sens de parler d'une table 2 ou d'une maison 3. On peut parler d'une table ronde, d'une maison carrée, pas d'une maison *deux*. On parle de deux maisons. Cela veut dire que *deux* se rapporte à un ensemble de maisons.

Les premières expériences des enfants, à l'école, devraient comporter des expériences à propos d'ensembles. Ils devraient discuter entre eux et avec la maîtresse de ce qu'est un ensemble d'objets. Un bon point de départ pour cette discussion serait de parler des « ensembles » qu'ils peuvent avoir chez eux, mais sans prononcer d'abord le mot d'« ensemble », dont ils ne connaissent pas encore le sens. Très vite, les enfants parleront de leur jeu de cubes, de leur train, d'un jeu de cartes – les Sept Familles –, d'une collection de timbres, et ainsi de beaucoup d'autres choses avec lesquelles ils jouent. On pourra alors discuter avec eux pour découvrir combien il y a de mots pour parler de ces séries, de ces collections, de ces jeux ; on parlera de tas, de piles, et j'ai vu de très jeunes enfants suggérer jusqu'à deux douzaines de mots différents. On leur dira alors que tous ces mots peuvent aussi bien faire l'affaire, mais qu'après tout il vaut mieux n'en prendre qu'un seul ; comme cela, tout le monde saura de quoi on parle. Et comme, dans tous ces cas, il s'agit d'objets, de choses qui « vont ensemble », on peut les amener à comprendre ce dernier terme. En pensant aux ensembles, les enfants penseront d'abord à ceux qui groupent des objets qui ont quelque chose de commun ou à ceux qui ont la même utilisation. Par exemple, l'ensemble train, ou l'ensemble de tables, ou peut-être l'ensemble des enfants de la classe, ou encore l'ensemble des enfants de la classe qui ont les yeux bleus. Dans chacun de ces cas, les éléments de l'ensemble ont ou bien quelque chose de commun en ce sens qu'ils ont la même propriété, ou bien le même usage, ce qui est encore, en fait, une propriété [1].

Ainsi, dans ce cas, nous utilisons le mot « ensemble » pour désigner une collection d'objets ayant la même propriété : nous avons d'abord songé à la propriété, puis nous avons rassemblé les objets qui la possèdent. Mais ce n'est pas là la seule manière dont on peut utiliser la notion d'ensemble. On peut aussi prendre une certaine personne, un crayon, une ville, une boîte, un arbre, une fleur et une pierre, et les considérer comme constituant un ensemble. Les éléments de celui-ci ne possèdent aucune propriété commune reconnaissable, sinon que par un acte de volonté nous avons décidé que dorénavant ils formeraient un ensemble [2]. On se trouve là à un niveau peut-être un peu plus artificiel de la pensée en matière d'ensembles ; aussi est-il sans doute préférable de ne pas aller trop vite. Ce qu'il faut en tout cas que le maître comprenne bien, c'est que la notion d'ensemble n'implique pas nécessairement l'existence préalable d'une propriété commune. Par contre, il est courant de parler d'un ensemble d'objets dès lors que ceux-ci la possèdent.

1.2. *Appartenance et non-appartenance à un ensemble*

On remarquera que déjà la notion d'appartenance s'est glissée dans la discussion. Comment savons-nous qu'un objet appartient ou n'appartient pas à un ensemble ? Qu'une certaine personne, qu'un certain objet *est* ou *n'est pas membre*, *élément* d'un ensemble ? Et, en tout cas, où cherchons-nous ces éléments ? L'univers est très vaste, et si nous cherchons partout, nous ne serons jamais sûrs d'avoir – ou de ne pas avoir – la totalité des éléments d'un ensemble. Aussi réduisons-nous normalement l'*univers* à une petite section de l'univers réel. Par exemple, si nous parlons des enfants blonds, nous pensons généralement aux enfants de l'école, voire à ceux de la classe où nous enseignons. Dans ce cas, ce sont les enfants de l'école ou ceux de la classe qui constituent l'univers restreint. Ou encore, supposons que nous ayons

1. On dit que l'ensemble est « défini en compréhension » ; mais il va de soi que cette terminologie ne sera pas proposée aux enfants de cet âge.
2. Ensemble « défini en extension ».

un certain genre de perles. Nous pouvons dire : « Pensons aux perles rouges ». Nous ne pensons pas à toutes les perles qui existent en ce monde ou qui pourraient même exister dans d'autres mondes, nous pensons seulement aux perles rouges qui sont dans la boîte devant nous. Certaines sont rouges, d'autres ne le sont pas. Nous disons aux enfants : « Pensez à l'ensemble des perles rouges ». Ce que nous voulons dire, c'est : « Pensez à la collection de perles rouges que vous pourriez faire avec les perles qui sont dans la boîte ». Ainsi, l'univers se trouve restreint aux perles qui sont dans la boîte, et l'ensemble que nous avons choisi a pour éléments les perles rouges prises dans cette boîte. Restreindre l'univers à ce qui est pratiquement manipulable est inévitable si l'on parle des ensembles en termes concrets. Mais, bien entendu, si on adopte la seconde méthode de constitution des ensembles, c'est-à-dire celle qui consiste à considérer certains objets comme appartenant à un ensemble par définition, il n'y a plus besoin d'univers. Il nous suffit de dire : « Prenez ceci. Et cela. Et encore cela ». Lorsque nous avons fini de dire ce que nous voulons, notre ensemble se trouve constitué. Ce que nous ne savons pas, c'est l'étendue de ce qui n'appartient pas à notre ensemble. Cela peut nous laisser indifférents, jusqu'au moment où nous en venons à effectuer sur notre ensemble des opérations pour lesquelles nous avons besoin de savoir quels sont les éléments de l'univers qui ne sont pas des éléments de notre ensemble. Et c'est précisément l'une des opérations que nous aurons à examiner au cours de notre étude des ensembles.

Aussi le premier point à aborder, dans notre étude des ensembles, doit-il être celui de l'appartenance et de la non-appartenance à un ensemble. Montrons d'abord clairement aux enfants qu'il faut décider du choix d'un univers. Ainsi, à chaque leçon, il pourra y avoir une petite discussion : quel univers allons-nous prendre aujourd'hui [1] ? Par exemple, on décidera que c'est celui de tous les enfants de la classe. Dans ce cas, on n'y compte pas le maître. Ou encore, c'est celui de toutes les personnes de la classe, et alors le maître y est compris. Ou encore, on peut décider que c'est celui de toutes les créatures de la classe. S'il y a un oiseau, ou quelques souris blanches, ou d'autres êtres vivants, qui ne sont pas des personnes, dans la classe, ils feront aussi partie de l'univers. Puis les enfants vont nommer des propriétés. Par exemple, toutes les créatures lentes, ou tous les garçons, ou tous les animaux mâles pourraient appartenir à notre ensemble. On pourra ensuite les faire tous aller dans un même coin de la classe, et on verra alors clairement que toutes les créatures qui sont dans ce coin appartiennent bien à l'ensemble des « garçons » de la classe et que celles qui ne sont pas allées dans ce coin n'appartiennent pas à l'ensemble des « garçons » de la classe. Puis, un enfant va peut-être suggérer une autre propriété, par exemple « les créatures âgées de six ans ». Dans ce

1. Il est vivement conseillé de coordonner ces discussions avec l'étude d'un « centre d'intérêt » ou la mise au point d'un « texte libre ».

cas, quiconque aura six ans appartiendra à l'ensemble et quiconque, enfant ou animal, n'aura pas six ans n'y appartiendra pas. Selon toute probabilité, il n'y aura pas d'animaux aussi âgés dans la classe, de sorte que l'ensemble se trouvera limité aux humains alors que l'univers contient encore des animaux. Ainsi, ce sont les enfants âgés de six ans qui constitueront l'ensemble, tandis que les enfants de cinq ans, ou de plus de six ans, et les animaux constitueront le reste de l'univers. On donne alors un nom à ce qui reste de l'univers par rapport à l'ensemble choisi, et on apprend le mot aux enfants. Ce mot, c'est *complément*. Le complément de l'ensemble, c'est la partie de l'univers qui ne constitue pas l'ensemble. Par exemple, si on pense à l'ensemble des perles rouges de la boîte, l'univers étant formé par toutes les perles de la boîte, le complément de l'ensemble des perles rouges est l'ensemble des perles qui ne sont pas rouges. Il y en a peut-être des bleues, des jaunes, des vertes ; toutes réunies, elles forment *le complément*, c'est-à-dire *l'ensemble complémentaire* de celui des perles rouges. Ainsi, l'appartenance et la non-appartenance à un ensemble conduisent-elles à l'idée des ensembles et de leurs compléments. On pourra même se demander ce qu'est le complément d'un complément. Prenons l'ensemble complémentaire, des perles non-rouges de la boîte. Quelle est la partie de l'univers, c'est-à-dire la partie de l'ensemble de toutes les perles de la boîte, qui ne fait pas partie des perles non-rouges ? Il ne faudra pas longtemps pour que les enfants disent : « Eh bien, ce sont les perles rouges, tiens ! ». Ainsi, le complément du complément d'un ensemble, c'est cet ensemble lui-même. Les perles non-non-rouges, ce sont les perles rouges, naturellement.

Nous suggérons de faire ces jeux au niveau des attributs quand on utilise les blocs logiques et leur matériel associé. Le jeu de la négation est un de ces jeux où les enfants sont incités à séparer « l'ensemble des choses que j'ai » et « l'ensemble des choses que je n'ai pas ». Et « si un bloc est dans mon ensemble, il ne peut pas être dans celui de mon voisin ». Et encore « s'il n'est pas dans mon ensemble, alors il faut qu'il soit dans celui du voisin. » Ces considérations forment la base du jeu de la négation. Aussi faut-il peut-être associer les considérations relatives aux ensembles et à leurs compléments aux considérations qui émergent pendant qu'on joue à la négation, au jeu de l'objet caché et à tous les autres jeux basés sur l'idée que « ceci appartient à ce lot et par conséquent ne peut pas appartenir au reste de la boîte », et ainsi de suite.

1.3. *Symbolisme des ensembles*

Les maîtres n'ont pas toujours conscience du fossé profond qui existe entre l'expérience des enfants et l'expression symbolique de cette expérience. Certes, lorsqu'un enfant arrive à l'école, il sait parler, mais il le fait inconsciemment. Il ne joue pas effectivement le jeu dont il

parle ; aussi, quand il en parle, le fait-il par l'intermédiaire de symboles, c'est-à-dire de phrases composées de mots qu'il sait utiliser avec beaucoup d'efficacité. Le langage est une forme très complexe de symbolisme par lequel une quantité énorme d'informations peut être transmise d'une personne à une autre. Un enfant de cinq ans est tout à fait versé dans l'art de transmettre cette information, car il s'est entraîné à l'apprendre. Pour satisfaire à ses besoins, il a, si l'on peut dire, été contraint d'apprendre ce langage. L'effort a été payant puisque, grâce à ce langage, il peut dire à sa mère qu'il veut ceci ou cela, ou qu'il n'aime pas telle ou telle chose, et ainsi de suite. Il est évident que c'est pour lui d'une importance capitale. En mathématiques, nous donnons à utiliser à l'enfant un autre langage, qu'il n'a aucune hâte d'utiliser, parce que les expériences que ces symboles décrivent lui sont par trop étrangères. Mais si l'on fournit aux enfants un nombre suffisant d'expériences créatrices et qu'en les vivant ils apprennent le genre de concepts que symbolise le langage mathématique, il est certain qu'ils finiront par acquérir de l'agilité à utiliser ce système de symboles tout comme ils en ont acquis à manier leur langue maternelle. Mais il faut bien se rendre compte que l'acquisition d'un tel système de symboles ne se fait pas en un jour. Le développement du langage chez les enfants s'étale sur plusieurs années. Il est aussi la conséquence de la formation, dans leur esprit, d'un certain nombre de concepts et, une fois cette formation acquise, de l'association, à ces concepts, des expressions correspondantes. Par exemple, des mots comme « avant », « après », « entre », « au-dessus de », « au-dessous de », « et », « si », « à moins que » ne se sont établis dans l'esprit de l'enfant qu'après de nombreuses expériences de situations symbolisées par ces termes. Aussi ne nous faut-il pas nous attendre à ce qu'un système complet de symboles logiques et mathématiques s'y amarre solidement du jour au lendemain. Il nous faut une très grande patience, afin que même les enfants les plus lents aient l'occasion de passer par un nombre suffisant d'expériences variées, qui leur seront indispensables avant que le symbolisme mathématique prenne pour eux toute sa signification. Sinon, ce symbolisme ne leur apportera aucune information profonde sur ce que les mathématiques représentent réellement : ce ne sera qu'une collection de formules soigneusement apprises par cœur en vue de répondre correctement aux examens et d'obtenir de bonnes notes.

Tel est certainement le cas en matière d'ensembles. Supposons que les enfants aient discuté d'ensembles pendant quelque temps et que l'un d'eux dise : « Tiens, celui-là, il était bien ! Si on le faisait encore demain ? ». La maîtresse pourrait alors dire : « Oui, c'est une bonne idée. Mais comment va-t-on s'en souvenir ? » Il s'agit peut-être d'enfants qui ne savent pas encore écrire. « Si on le dessinait ? » dira un des enfants. Supposons qu'il s'agisse de tout l'ameublement de la classe : on va dessiner le bureau de la maîtresse, sa chaise, les tables, les bancs, l'armoire, les étagères, etc... et on aura ainsi une représentation symbolique de l'ensemble de meubles considéré ce jour là. Alors les enfants n'oublieront pas, le lendemain, sa composition exacte ; ils pourront même le regarder le soir à la maison, parce qu'ils l'auront en symboles sur un bout de papier. Mais attention! Ce n'est pas l'ensemble lui-même qui est sur cette feuille, c'est un ensemble de symboles représentant les éléments de l'ensemble étudié. Il est évident que l'image de la table n'est pas la table elle-même. Elle n'a que la valeur d'un symbole destiné à nous rappeler que nous pensions à la table. De même pour les autres éléments. Jusqu'à présent, nous n'avons qu'un conglomérat de symboles correspondant aux divers éléments constitutifs de l'ensemble. Mais nous n'avons encore porté sur le papier aucune indication, aucun signe rappelant que ces éléments sont considérés, dans leur totalité, comme formant un ensemble. Il existe un symbole à cet effet : ce sont les *accolades* { }. Aussi pourrions-nous mettre une accolade à un bout du papier et une accolade à l'autre bout. Entre ces accolades, nous pourrions faire les petits dessins représentant les différents éléments de l'ensemble. Nous voilà donc, peut-être, en présence de notre première représentation, de notre premier système utilisable pour un ensemble. Les enfants seront tout heureux de faire des petits dessins représentant les éléments et de dessiner le symbole de l'ensemble pour marquer le fait que dorénavant nous considérons certains éléments comme constituant un ensemble.

Bien entendu, il n'est pas nécessaire de représenter tous les éléments de l'ensemble. S'ils sont très nombreux, ce ne serait guère praticable. Lorsque les éléments d'un ensemble sont très nombreux, il y a de fortes chances pour que ce dernier ait été défini par un attribut que tous les éléments doivent posséder pour en faire partie. Par exemple, les perles rouges de la boîte. Dans ce cas, nous pourrions, encore, poser nos accolades et, à l'intérieur, tracer une ligne rouge indiquant, par sa couleur, qu'on pense à des objets rouges, et on pourrait même ajouter au dessus le mot « perles » si on sait déjà l'écrire. Mettre un mot, c'est entrer déjà dans un autre système de symbolisation. Une ligne rouge, l'image d'une table sont des symboles parlants immédiats, correspondant immédiatement à l'idée que l'enfant se fait des éléments de notre ensemble. Si on écrit le mot « perles » dans nos accolades, on recourt à un symbolisme qui n'est nullement illustratif au sens où l'étaient la ligne rouge ou les petits dessins, rappelant, par la couleur ou les formes, des perles ou des meubles. Les lettres qui composent le mot p e r l e s ne rappellent en rien des perles, et on entre dans une forme de représentation nettement différente. Cette forme, les enfants l'accepteront parce qu'ils ont déjà un langage. Aussi bien ne s'agit-il que d'un autre mode de communication du langage, le mode *écrit* par opposition au mode *parlé*. La plus grande partie de la difficulté de la transition de la représentation illustrée à la représentation verbale se trouve écartée du simple fait que l'enfant a déjà appris à parler. Et puisque nous voilà prêts à employer, comme représentations symboliques, des mots, il n'y a plus besoin de tracer une ligne rouge. Autant employer le mot « rouge » et écrire entre accolades {perles rouges} ou encore, si on emploie les blocs logiques, {blocs rouges} ou {carrés rouges} ou {triangles bleus minces} ou tout autre attribut qui, dans le

cadre de l'ensemble universel des blocs logiques, permettra de définir un ensemble.

1.4. *Ensembles et attributs*

Les enfants ne sont pas longs à imaginer des attributs de plus en plus compliqués pour définir des ensembles. Bien entendu, soulignons qu'il est indispensable de définir un univers avant de définir des ensembles en fonction d'attributs. Il faut savoir de quoi on parle avant de dire que parmi les choses dont on parle on va penser à un certain ensemble tel que celui des blocs rouges parmi tous les blocs logiques, ou de tous les enfants blonds parmi tous les enfants de la classe, ou de l'école, et ainsi de suite. Ces attributs deviennent progressivement plus complexes. Par exemple, on peut penser non pas simplement aux enfants blonds, mais à ceux des enfants blonds qui ont des chaussures noires et des vêtements rouges, ou aux filles qui ont à la fois les cheveux frisés, les yeux bleus, la chevelure blonde et ainsi de suite. On peut ainsi empiler attributs sur attributs et créer de nouveaux attributs, c'est-à-dire des attributs composés à partir d'attributs simples. C'est là un exercice que les enfants trouveront très amusant, et ils trouveront un grand plaisir à imaginer des attributs toujours plus compliqués. Au bout du compte, si les attributs sont assez compliqués, il peut arriver qu'il n'existe dans l'univers choisi aucun élément y correspondant. Supposons, par exemple, qu'on prenne l'univers des enfants de la classe et qu'on veuille en isoler les filles blondes, bouclées, aux yeux bleus ayant aussi des chaussures noires et un cardigan vert. Il peut très bien se faire qu'il n'y ait dans la classe aucun enfant satisfaisant à toutes ces conditions. Il peut même se faire qu'on n'ait pas besoin d'aller chercher des attributs aussi compliqués pour ne trouver aucun élément. En tout cas, on a un – ou plusieurs – attributs et, en un sens, il faut bien qu'il y ait un ensemble leur correspondant, même s'il ne comporte aucun élément. Un tel ensemble est dit *ensemble vide*. Il est vide parce qu'il ne contient aucun élément. Et l'attribut est tel qu'aucun membre de l'univers ne possède un tel attribut et il définit, par conséquent, un ensemble vide dans un certain univers. Il est tout à fait possible qu'en passant dans un certain univers notre attribut définisse un ensemble qui ne sera pas vide. La notion d'*ensemble vide* est une notion très importante pour les enfants ; il faut qu'ils la possèdent bien, car lorsqu'ils en viendront à l'étude des nombres, c'est le nombre d'éléments dans l'ensemble vide qu'ils désigneront par le nombre zéro. Et c'est parce que les enfants confondent le *nombre zéro* avec *rien* qu'ils se heurtent plus tard à certaines difficultés en mathématique. L'ensemble vide n'est pas lui-même zéro. L'ensemble vide a la propriété zéro. De même qu'un ensemble de deux enfants a la propriété deux. L'ensemble de deux enfants *n'est pas* en lui-même la propriété deux. Il *a* seulement la propriété deux. Un ensemble vide peut être symbolisé par une paire d'accolades sans rien dedans { }. Ainsi, par exemple, nous pourrions dire que, dans l'univers des blocs logiques, les carrés qui sont en même temps des ronds forment un ensemble vide, de même que les rouges qui sont en même temps bleu, ou les épais qui sont minces, et ainsi de suite. Symboliquement, on peut écrire

$$\{\text{carré rond}\} = \{\ \}$$

et ainsi de suite.

1.5. *L'idée de similitude ou d'égalité*

Qu'est-ce que l'on considère comme semblable? La question est très difficile. Il est bien évident que deux objets distincts ne peuvent pas être le même objet. Aussi quand on dit que cette assiette est la même que celle-là, on ne veut pas dire qu'il s'agit de la même assiette. Ce qu'on veut dire, c'est que certaines propriétés des deux assiettes sont les mêmes. Elles peuvent avoir la même couleur, la même forme, le même poids, le même dessin, être de la même matière et, en définitive, être semblables de bien des façons différentes. Mais ce sont, tout de même, deux assiettes différentes. C'est peut-être une vérité de La Palisse, mais qu'il faut bien comprendre, si on veut arriver à dégager le sens du mot « même », qu'un objet n'est, et ne peut être identique qu'à lui-même! Tout pareillement, un ensemble d'objets ne peut être le même ensemble que s'il contient les mêmes objets, c'est-à-dire les mêmes éléments : ceux-ci peuvent être arrangés dans un ordre différent. Un ensemble d'objets demeure, en soi, *le même* si les éléments, sans changer intrinsèquement, ont changé de place ou d'ordre.

Ainsi, un ensemble d'objets, c'est-à-dire un ensemble d'éléments quelconques d'un ensemble quelconque, peut-il seulement être « le même » que l'ensemble constitué par ces mêmes éléments. Il peut ici se produire une légère confusion, du fait que lorsque nous dessinons la représentation d'un ensemble, on ne voit pas toujours clairement quels sont exactement les objets que nous représentons effectivement. Supposons, par exemple, que nous ayons dessiné un arbre et une maison et que nous mettions ces deux dessins entre accolades, puis que nous disions que cet ensemble est égal à un ensemble formé par un arbre et une maison, mis entre accolades. Or, cela peut ne pas être vrai. Ce sera vrai si l'arbre de la première image représente exactement le même arbre que celui de la seconde image, si la maison de la première image représente exactement la même maison que celle de la seconde image (et non une maison *semblable*). Dans ce cas, il sera vrai de dire que

$$\{\text{arbre, maison}\} = \{\text{arbre, maison}\}$$

ou encore, bien sûr

$$\{\text{arbre, maison}\} = \{\text{maison, arbre}\}$$

étant donné que l'ordre dans lequel les éléments sont énumérés est sans importance. L'absence d'incidence de l'ordre des éléments sur l'identité d'un ensemble est connue sous le nom de conservation des ensembles.

Si, par contre, l'arbre de l'un des dessins représente un certain arbre, et que l'arbre de l'autre dessin représente un autre arbre, même s'ils sont dessinés exactement de la même manière, le premier ensemble n'est plus le même que le second, car la composition du premier ensemble n'est pas la même que celle du second. Il se peut très bien qu'il faille beaucoup de discussions avant que les enfants comprennent clairement que lorsqu'on parle de « même », il ne s'agit pas des images des objets, mais des objets eux-mêmes. Si on dessine un arbre à un bout du papier et un autre arbre à un autre bout, si ressemblants qu'on les fasse, ils ne représenteront le *même* arbre que par un acte de volonté de notre part, clairement manifesté. Si, soudain, nous pensons à l'un des deux dessins comme représentant un arbre de notre jardin et à l'autre comme représentant un arbre du square d'en face, alors le premier des deux dessins n'est plus « égal » au second.

Nous pouvons recourir à l'idée d'égalité des ensembles pour indiquer que certains ensembles sont vides. Par exemple, nous pourrions écrire

$$\{\text{cercles carrés}\} = \{\quad\}$$

Cela signifie que l'attribut « cercles carrés », appliqué à l'univers des blocs logiques, ne s'applique en fait à aucun élément. L'attribut « cercles carrés » définit l'ensemble vide dans notre univers. De même « rouge bleu », et ainsi de suite. Ou encore, on peut employer le signe égale pour marquer l'égalité entre la définition d'un ensemble par certains attributs et la définition d'un ensemble par la notation symbolique de tous les éléments de cet ensemble. Par exemple, à propos de blocs logiques, nous pourrions dire :

{ronds épais rouges} = 

r r

De cette manière, les enfants saisiront que les définitions d'ensembles sous forme d'énonciation du genre de choses qu'ils contiennent peuvent être équivalentes aux définitions d'ensembles sous forme d'énumération exacte de ce qu'ils contiennent. La première est une définition par attributs. Nous disons que nous voulons considérer dans notre ensemble tous les éléments de notre univers qui sont comme ceci et comme cela. Dans la seconde définition, nous disons : « Nous voulons considérer dans notre ensemble tous les membres de notre ensemble ». Si, dans chaque cas, nous réussissons à définir exactement le même ensemble d'objets, nous pouvons mettre un signe égale entre l'ensemble défini par les attributs et l'ensemble défini par énumération des éléments. Par exemple, supposons qu'il y ait juste trois filles blondes aux yeux bleus dans la classe, et qu'elles s'appellent Valérie, Rosine, Catherine. Nous pouvons alors dire

{filles blondes aux yeux bleus} = {Valérie, Rosine, Catherine}

Les instituteurs n'auront pas de mal à imaginer des exercices pour permettre aux enfants de pratiquer ces équivalences. Ils pourront, par exemple, faire des jeux dans lesquels un premier groupe d'enfants énumère certains camarades tandis qu'un second groupe doit deviner quels sont les attributs qui définissent juste ces camarades là et pas d'autres. Ou inversement. Certains enfants proposent un attribut, et les autres doivent découvrir les éléments qui appartiennent à l'ensemble possédant l'attribut proposé par le premier groupe d'enfants.

Les enfants ont parfois besoin de moyens matériels pour séparer les éléments d'un ensemble du reste des éléments de l'univers. Si ce sont les enfants de la classe qui constituent l'univers, on pourra, pour isoler les enfants que nous considérons comme formant un ensemble, par exemple les garçons de la classe, prendre une grande corde qu'on passera autour de tous les garçons. Ou encore, si la classe n'est pas trop importante, on pourra se servir d'un cerceau, ou de marques à la craie. Ces dernières n'ont pas la même efficacité qu'une chose que l'on peut matériellement passer autour des enfants. Les jeunes enfants ont du mal à concevoir que lorsqu'ils ont tracé à la craie un cercle sur le sol et qu'ils entrent dedans, ils sont en fait à l'intérieur de la courbe. Ils pensent probablement qu'ils sont *dessus*, tandis que s'ils sont entourés d'un cerceau ou d'une corde, ils sentiront vraiment qu'ils sont *dedans*. Cette « intériorité » peut constituer l'aide matérielle grâce à laquelle les enfants peuvent être conduits à découvrir l'appartenance à un ensemble. Toute personne qui est dans la boucle est membre, élément de l'ensemble, et toute autre personne qui n'est pas dedans n'en est pas membre.

1.6. *Opérations sur les ensembles*

Réunion et intersection

Supposons que nous prenions l'ensemble de tous les garçons de la classe, puis l'ensemble de tous les enfants vêtus de rouge, ou ayant tout autre attribut quelconque ; les enfants ne demandent pas mieux que d'exprimer – et même bruyamment – leurs désirs sur la manière de se grouper en ensembles. La réunion de deux ensembles n'est rien d'autre que le fait d'assembler les enfants qui possèdent l'un *ou* l'autre attribut. Dans notre exemple, nous réunissons tous les enfants qui sont des garçons avec tous les enfants vêtus de rouge, y compris, bien entendu, les garçons vêtus de rouge. Nous allons trouver ici une petite

difficulté due à la réalisation matérielle de la séparation entre les garçons et les enfants vêtus de rouge. Naturellement, si on dispose de cordes, on en passera une autour de tous les garçons et une autre autour de tous les enfants vêtus de rouge, et les enfants verront vite qu'il faut que les cordes se croisent si tout le monde doit être entouré de la bonne corde ; les garçons en rouge seront dans les deux cordes. La seule manière d'éviter cette difficulté est de considérer des réunions d'ensembles dans lesquelles il n'y a pas d'éléments communs. Évidemment, la formation de réunions s'en trouverait facilitée, mais ces réunions auraient un caractère moins général, et les enfants pourraient en déduire qu'on ne peut faire de réunions que si les ensembles n'ont pas d'éléments communs. Or, il n'en est rien. On risquerait donc de poser dans l'esprit des enfants les fondements d'un concept faux. L'autre manière d'aborder le problème consisterait à considérer les parties communes des ensembles avant de considérer leur réunion. Le terme technique généralement employé en matière d'ensembles, quand on parle de leurs parties communes, c'est *intersection.* Tout comme en matière de routes où, quand deux routes se croisent, l'intersection, c'est cette partie qui appartient aussi bien à l'une des routes qu'à l'autre. L'intersection de chaque ensemble, c'est la partie de cet ensemble qui est aussi dans l'autre. Dans notre exemple, les garçons vêtus de rouge forment l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans l'ensemble des garçons et dans l'ensemble des enfants vêtus de rouge. Si donc nous prenons, pour ainsi dire, le taureau par les cornes et que nous affrontons la difficulté dès l'abord, nous aurons peut-être moins de difficultés plus tard. Nous suggérons donc d'étudier les réunions et les intersections d'ensembles en même temps, et non séparément. Mais, comme nous l'avons déjà dit, on a aussi la possibilité d'avancer à petits pas, d'étudier d'abord les réunions où il n'y a pas de partie commune, pour passer ensuite aux intersections et, enfin, aux réunions d'ensembles avec parties communes non-vides.

Si les enfants se sont déjà familiarisés avec les blocs logiques, ils auront peut-être déjà joué à des jeux comportant des conjonctions et des disjonctions. Un jeu de conjonction, c'est un jeu sur « à la fois... et... », tandis qu'un jeu de disjonction est un jeu sur « ou bien... ou bien ». Dans les jeux conjonctifs, avec les blocs logiques, on apprend aux enfants à considérer des attributs « composés » qui soient tels qu'un bloc puisse les posséder à la fois. Par exemple, rouge et carré. Un bloc qui est à la fois rouge et carré possède l'attribut « rouge » et l'attribut « carré ». Si donc nous voulons former l'ensemble de tous les blocs rouges et l'ensemble de tous les blocs carrés, alors les blocs qui sont rouges *et* carrés seront contenus dans l'*intersection* de l'ensemble des blocs rouges et de celui des blocs carrés. Les jeux conjonctifs, quand ils sont joués avec des attributs, correspondent aux jeux d'intersection joués avec des ensembles. Ainsi les diagrammes de Venn, construits avec les blocs logiques, correspondent-ils exactement au procédé qui consiste à entourer les enfants de cordes et à réaliser ainsi des intersections. De la sorte, il sera naturellement possible de penser à plus de deux attributs, trois par exemple, et, prenant les enfants comme membres de notre univers, de faire un diagramme de Venn à trois cerceaux. Par exemple, on peut prendre comme premier attribut la qualité de garçon et penser à l'ensemble de tous les garçons. Puis on prendra comme autre attribut le fait de porter du rouge et former l'ensemble de tous les enfants qui portent du rouge. Enfin, prenant les cheveux blonds comme troisième attribut, on constituerait l'ensemble de tous les enfants aux cheveux blonds. On peut alors passer des cordes autour de ces ensembles et laisser les enfants déterminer auquel ils appartiennent, car ils savent bien comment ils sont habillés, s'ils sont garçons ou filles, s'ils ont ou non des cheveux blonds. Ainsi, jouer aux intersections, dans le cas d'ensembles, c'est en somme la « même » chose que de jouer au jeu des « et » avec les attributs.

De même, faire des réunions, c'est la même chose que de jouer à « ou... ou » avec les attributs. Prenons, par exemple, la réunion de l'ensemble des garçons avec l'ensemble des enfants vêtus de rouge ; alors la réunion formée par la totalité des enfants considérés de l'un ou l'autre ensemble peut être définie par l'attribut « ou bien être un garçon ou bien être habillé de rouge ». Cela signifie donc que nous considérons tous les enfants qui sont dans l'une ou l'autre corde. Naturellement, dans le cas de trois attributs, nous considérons l'ensemble d'enfants qui est la réunion de l'ensemble des garçons avec l'ensemble des enfants vêtus de rouge, puis la réunion de cette réunion avec l'ensemble des enfants aux cheveux blonds. Alors nous pouvons dire que, dans la réunion totale, nous considérons tout enfant qui a l'un ou l'autre des trois attributs, c'est-à-dire :

il faut que ce soit un garçon, ou qu'il porte du rouge, ou encore qu'il ait les cheveux blonds.

On peut rendre le jeu des « ou... ou » plus réaliste et l'adjoindre au jeu des réunions en disant qu'on va faire un club avec des règles pour y entrer. On dira, par exemple, que tous les garçons ont le droit de faire partie du club, de même que toute personne portant du rouge ou ayant des cheveux blonds. Les enfants verront que si on n'est pas garçon, on peut quand même être admis, pourvu qu'on porte du rouge ; et même si on n'a pas d'habits rouges et si on n'est pas un garçon, on peut quand même être reçu avec des cheveux blonds. On peut, bien entendu, multiplier les exercices et les enfants découvrent les situations « si... alors... » correspondantes. Naturellement, avant d'en arriver là, il faudra faire pas mal de jeux avec les réunions et il faudra établir que tout élément d'une réunion de deux ensembles possède l'un ou l'autre des attributs définissant chacun des deux ensembles qui ont été réunis.

1.7. *Symbolisation des opérations sur les ensembles*

A un certain stade de l'apprentissage, on peut introduire les premiers symboles pour noter les opérations exécutées sur les ensembles.

Les réunions sont généralement désignées par un $\cup$ et les intersections par un $\cap$ renversé. Par exemple, si S et T représentent deux ensembles, leur réunion s'écrira $S \cup T$. L'intersection de S et de T s'écrira $S \cap T$. L'ensemble vide se représentera, comme on l'a déjà suggéré, en ne mettant rien entre les accolades. Ainsi, pour marquer que S et T n'ont aucun élément commun, on écrira

$$S \cap T = \{\,\}$$

Cela signifie que l'intersection des ensembles S et T est l'ensemble vide. En d'autres termes, l'ensemble des éléments qu'ils ont en commun est vide, ou encore ils n'ont pas d'élément commun. Il peut aussi se faire qu'en réunissant deux ensembles, on obtienne tout l'univers. Par exemple, si l'univers est formé des enfants de la classe, et que l'on appelle G l'ensemble des garçons et F l'ensemble des filles, la réunion de G et de F donne l'ensemble des enfants, donc l'univers. On peut vouloir disposer d'une notation pour désigner l'univers. On emploie souvent la lettre majuscule I, pour « identité ». Nous pourrions alors, dans notre exemple, écrire

$$G \cup F = I$$

Cela signifierait que la réunion de l'ensemble des garçons et de l'ensemble des filles est la même chose que l'ensemble de tous les éléments de l'univers. Nous disons, dans ce cas, que G est l'ensemble complémentaire de F et F l'ensemble complémentaire de G, mais (seulement) si G et F n'ont aucun élément commun. Ainsi les deux ensembles G et F sont complémentaires l'un de l'autre *si et seulement si* les deux équations suivantes se vérifient :

$$\begin{aligned} &(1) \quad G \cup F = I \\ &(2) \quad G \cap F = \{\,\} \end{aligned}$$

Ces équations signifient, dans le langage moins concis de tous les jours : « L'ensemble des garçons et l'ensemble des filles, si on les réunit, nous donne l'ensemble de tous les enfants de la classe et il n'y a ni garçons qui soient à la fois des filles, ni filles qui soient à la fois des garçons ». Dans ce cas, il est évident que tout enfant doit être un garçon OU une fille et qu'aucun enfant ne peut être à la fois garçon et fille. Des exemples d'ensembles complémentaires de ce genre se présentent souvent en mathématique, les éléments des ensembles étant les éléments d'autres structures mathématiques. Par exemple, si l'univers est composé de l'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire 1, 2, 3, 4, 5, etc... on peut dire que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs sont des ensembles complémentaires, car tout nombre naturel est pair ou impair, et il n'y a pas de nombre naturel qui puisse être à la fois pair et impair. Ainsi les équations (1) et (2) sont vraies toutes les deux à la fois pour l'ensemble des nombres impairs et l'ensemble des nombres pairs. Ces exemples peuvent aussi servir à illustrer cette théorie, à condition que les enfants aient déjà acquis une connaissance pratique suffisante des nombres. Or, les nombres en tant que tels n'ont pas encore été introduits, à ce stade ; nous nous proposons d'asseoir la notion de nombre sur celle d'ensembles et, à ce stade, nous nous occupons encore des ensembles en tant que tels. Plus tard, quand nous aurons introduit les nombres, nous pourrons considérer les ensembles dont les éléments sont eux-mêmes les nombres ou les ensembles dont les éléments sont des ensembles de nombres, et ainsi de suite. Le ciel est le seul plafond de ce genre de généralisations en mathématique, même au niveau de l'enseignement du premier degré.

1.8. *Ensemble-différence, complément et leurs symboles*

Nous avons vu qu'il est possible de partager l'univers en deux ensembles complémentaires, tels que l'ensemble des garçons et l'ensemble des filles, si l'univers est formé par tous les enfants de la classe. Bien entendu, cette opération peut être exécutée non seulement sur l'univers, mais encore sur n'importe quel autre ensemble. Dans ce cas, les ensembles partiels formés par découpage de l'ensemble d'origine s'appellent des sous-ensembles. Par exemple, si nous prenions encore comme univers tous les enfants de la classe, les garçons constitueraient un ensemble et, comme sous-ensemble, on pourrait prendre les garçons âgés de six ans. L'ensemble des garçons âgés de six ans constitue un sous-ensemble de l'ensemble des garçons. Si maintenant nous voulons considérer les éléments de l'ensemble des garçons qui ne sont pas dans le sous-ensemble, nous allons, naturellement, prendre les garçons qui sont dans la classe mais qui n'ont pas six ans, c'est-à-dire ceux qui ont cinq ans, ou sept ans, ou huit ans, ou tout âge autre que six ans. La partie restante d'un ensemble, qui n'inclut pas un certain sous-ensemble, est dite ensemble-différence de l'ensemble de base et du sous-ensemble. Nous pouvons dire que l'ensemble des garçons qui n'ont pas six ans est l'ensemble-différence entre l'ensemble des garçons et l'ensemble des garçons âgés de six ans. On peut employer une notation pour cette différence, un peu comme le signe moins pour les nombres. On emploie souvent un trait oblique. Admettons, par exemple, que G soit l'ensemble des garçons et S l'ensemble des garçons âgés de six ans. L'ensemble G \ S est alors l'ensemble différence, c'est-à-dire l'ensemble des garçons qui n'ont pas six ans. Appelons D cet ensemble différence : on peut alors écrire

$$D = G \setminus S$$

On peut également, bien sûr, utiliser cette notation pour les ensembles complémentaires et, par exemple, écrire :

$$G = I \setminus F$$
$$F = I \setminus G$$

La première égalité signifie que l'ensemble des garçons est l'ensemble des enfants qui ne sont pas des filles. La seconde égalité signifie que l'ensemble des filles est l'ensemble des enfants qui ne sont pas

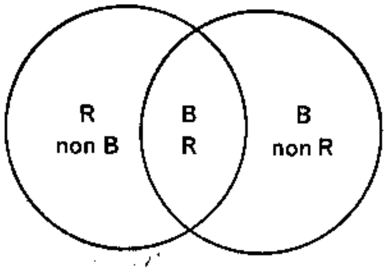
garçons. Ainsi, le signe \ nous permet de désigner les ensembles complémentaires.

Pour commencer, il est bien d'utiliser cette notation avec parcimonie. On finira par l'employer conjointement avec les signes de réunion et d'intersection. Supposons, par exemple, que nous voulions parler de l'intersection d'un ensemble avec un autre ensemble-différence ou avec un ensemble complémentaire. Soit, encore une fois, comme univers l'ensemble des enfants de la classe et un ensemble B formé de tous les enfants blonds ; si l'on appelle R l'ensemble des enfants vêtus de rouge, comment désignerons-nous l'ensemble des enfants habillés de rouge qui n'ont pas les cheveux blonds ? Les enfants qui n'ont pas les cheveux blonds vont former l'ensemble complémentaire de celui des enfants qui ont les cheveux blonds. Ainsi, l'ensemble des enfants qui ne sont pas blonds peut s'écrire I \ B. L'ensemble des enfants habillés de rouge s'écrit {R}. Or, ce qui nous intéresse actuellement, c'est la partie commune, ou intersection, de ces deux ensembles. Nous écrivons

$$\{I \setminus B\} \cap \{R\}$$

Cet ensemble est celui dont nous avons parlé, c'est-à-dire l'ensemble des enfants non-blonds qui portent du rouge ou encore l'ensemble des enfants porteurs de rouge qui ne sont pas blonds.

Nous n'insisterons jamais assez sur le fait que ce « calcul » sur les ensembles n'est pas à présenter à tout prix aux enfants. Ce qui compte, c'est de leur communiquer l'idée *d'ensemble*, l'idée de *relation entre un élément et l'ensemble*, les notions d'*ensemble vide*, de réunion, d'intersection et de compléments des ensembles. Si les enfants éprouvent une difficulté quelconque à utiliser le symbolisme, il faut renoncer à s'en servir. Il serait tout aussi facile dans la plupart des cas d'écrire la définition d'un ensemble sous la forme d'une phrase du langage courant, comme nous l'avons souvent fait jusqu'ici. Par exemple, au lieu d'écrire la définition d'un ensemble d'une manière formelle, nous pourrions dire, comme nous l'avons fait : « L'ensemble des enfants qui n'ont pas les cheveux blonds et qui portent du rouge ». Il se peut qu'à certains âges et à certains stades, ce genre de description verbale convienne mieux. Il y a, bien entendu, un autre mode d'expression, ce sont les diagrammes de Venn :



Notre ensemble se trouve à gauche (R non B). Cette notation est très claire et dès que les enfants ont compris que les limites des diagrammes de Venn indiquent les conditions d'appartenance à l'ensemble pour les objets qui sont dedans et de non-appartenance à l'ensemble pour les objets qui sont dehors, il ne devrait y avoir aucune difficulté à tracer le diagramme de Venn d'un ensemble quelconque. En fait, ce diagramme fera comprendre aux enfants la notion d'ensemble, que nous voulons leur faire acquérir, beaucoup plus vite et plus efficacement que toute autre notation formelle. Par contre, il y aura des enfants qui apprécieront la concision et la beauté d'une notation formelle : il ne faut pas les en priver, de sorte que, finalement, on ne peut poser à ce sujet aucune règle rigide. Ce qui n'est pas douteux, c'est qu'il faudra bien recourir ne serait-ce qu'à une notation très simple pour conserver trace de ce qu'on a fait, et certaines abréviations seront probablement nécessaires. Il ne sera ni nécessaire ni souhaitable de tout écrire *in extenso* en langage courant. Les enfants sont prompts à abréger ; quant à savoir dans quelle mesure, ce faisant, ils peuvent progresser vers un langage plus concis et plus formel, c'est la situation concrète en classe qui permettra d'en décider.

Les opérations sur les ensembles qui vont avoir une influence importante sur l'introduction des *opérations arithmétiques* sur les nombres sont :

1) l'opération qui construit l'ensemble-réunion
2) l'opération qui construit l'ensemble-différence.

La réunion de deux ensembles, dans le cas où l'intersection de ces deux ensembles sera vide, constituera le stade préalable à l'opération arithmétique *d'addition*. La découverte de la différence entre deux ensembles conduit à la découverte de la différence entre deux nombres, c'est-à-dire à l'opération arithmétique de *soustraction*. Mais, avant d'aborder ces opérations, il faudra découvrir le concept de nombre en tant que propriété d'un ensemble, comme nous le montrerons au 2e chapitre.

1.9. *Effets d'un changement d'univers*

Pour pouvoir introduire l'opération de multiplication, il faut d'abord que les enfants aient eu quelque expérience non seulement des ensembles d'objets, mais encore des ensembles d'ensembles d'objets. Par exemple, on organisera les enfants de la classe en paires ; on pourra ensuite parler d'un ensemble de paires d'enfants de la classe, et les éléments de cet ensemble ne seront plus constitués chacun par un enfant mais par une paire d'enfants. Ce faisant, nous passons de l'univers des enfants à l'univers des ensembles d'enfants. Il s'agit alors d'un univers beaucoup plus vaste ; avec les trente enfants de la classe on peut constituer littéralement des millions d'ensembles d'enfants. Il existe, en effet, de nombreuses manières de constituer, à partir de trente enfants, des ensembles de trois enfants, de quatre enfants, etc.

Laissons notre lecteur, si cela l'intéresse, calculer combien d'ensembles différents on peut faire avec trente enfants ou trente objets d'un univers. Le lecteur non-mathématicien sera surpris de la réponse. Ce n'est pas seulement la vaste étendue de l'appartenance qui est une source de difficulté à ce stade, mais encore la différence de nature de cette appartenance. C'est souvent parce que les enfants n'ont pas appris à manipuler des ensembles en tant qu'éléments d'autres ensembles qu'ils ne sont pas capables de saisir pleinement tous les aspects du problème de la multiplication. Aussi pensons-nous qu'il faut se pencher sur les ensembles dont les éléments sont des ensembles. On pourrait, par exemple, prendre comme univers non seulement des ensembles d'enfants, mais encore peut-être des ensembles de blocs logiques ou des ensembles de meubles, etc... A tout moment, il sera nécessaire de rappeler aux enfants que ce ne sont plus des objets isolés mais des groupes ou des ensembles d'objets qui sont les éléments de l'ensemble. Les diagrammes de Venn procurent de bons exemples de la différence entre un problème posé dans l'univers des blocs logiques et le même problème posé dans l'univers des ensembles de blocs logiques. Par exemple, si on prend un diagramme de Venn composé de deux cercles, que dans l'un des deux cercles on met les blocs bleus et dans l'autre les blocs rouges, dans l'intersection nous ne pourrons pas mettre de blocs du tout, parce qu'il n'y a pas de blocs rouges qui soient en même temps bleus, ni de blocs bleus qui soient en même temps rouges. Par contre, si l'univers est constitué par des ensembles de blocs, alors nous pouvons avoir des *ensembles de blocs* qui sont rouges et bleus, parce que dans l'ensemble nous pouvons mettre certains blocs bleus et certains blocs rouges. Aussi, dans le diagramme de Venn, dans ce cas, l'appartenance consistera en piles de blocs. Les piles, dans les parties de l'ensemble rouge, qui n'est pas dans l'ensemble bleu, seront composées entièrement de blocs rouges. Dans la partie de l'ensemble bleu, qui n'est pas dans l'ensemble rouge, les piles seront faites entièrement de blocs bleus. Mais dans l'intersection, c'est-à-dire dans la partie de l'ensemble rouge qui est aussi dans l'ensemble bleu, nous ferons des piles contenant à la fois des blocs rouges et des blocs bleus. Ainsi, si l'univers est composé d'ensembles de blocs, l'intersection du diagramme de Venn n'est pas vide ; si l'univers n'est composé que de blocs, l'intersection du même diagramme de Venn est vide.

2. LES NOMBRES

2.1. *Les nombres en tant que propriétés des ensembles. Ensembles équivalents*

On ne répétera jamais assez que le nombre n'est pas du tout une chose. C'est une propriété, tout comme la rougeur des joues ou la noirceur de la nuit ou la rondeur des tours. Ces propriétés ne sont ni des objets réels, ni des événements. La rondeur d'une tour n'est pas la tour elle-même. La noirceur de la nuit n'est pas la nuit. Ce sont des propriétés, elles n'existent pas indépendamment. De même, des nombres comme deux, trois, quatre, n'existent pas « concrètement » : ce sont des propriétés des ensembles d'éléments auxquels ils se rapportent ; « deux » est la propriété de tout ensemble de deux objets, trois est la propriété de tout ensemble de trois objets.

Pour découvrir cette notion de propriété, il faut que les enfants jouent à des *jeux de correspondance terme à terme*. Il leur faut apprendre à classer les ensembles en ensembles équivalents. Par exemple, apportons des chapeaux en papier dans la classe, et demandons aux enfants s'il y en a assez pour que chacun en ait un. Y a-t-il trop de chapeaux, ou d'enfants, ou juste assez ? Une fois la distribution terminée, il y aura peut-être des enfants sans chapeau, ou trop de chapeaux, et il en restera quelques-uns par terre. Ou encore, si on a bien calculé, il y aura peut-être exactement autant de chapeaux que d'enfants. Dans ce cas, nous aurons établi une correspondance terme à terme entre l'ensemble des chapeaux et l'ensemble des enfants de la classe. Quand une telle correspondance se trouve établie entre deux ensembles, on dit que ces deux ensembles sont *équivalents*. Nous disons aussi qu'ils ont la même *propriété numérique*. Par exemple, s'il y a cinq enfants dans le groupe et que nous leur donnons cinq chapeaux, il y a correspondance terme à terme en ce sens que chaque enfant n'aura qu'un chapeau et qu'à tout chapeau correspondra un et un seul enfant. Il n'y aura aucun enfant sans chapeau ni aucun chapeau sans enfant. Cette propriété commune des deux ensembles, qui les rend équivalents par la possibilité d'établir une correspondance d'élément à élément, est appelée la *propriété cinq* [1] ; avant que les enfants commencent à écrire les chiffres qui symbolisent les propriétés numériques, il est indispensable qu'ils jouent à des jeux de correspondances de ce genre, ne serait-ce qu'en se prenant comme éléments d'un ensemble et en utilisant des objets de la classe pour faire des ensembles équivalents, et ainsi de suite.

Il n'est pas nécessaire que les ensembles équivalents appartiennent au même univers. Par exemple, on peut former un *ensemble de tables* dans la classe et former *un ensemble d'ensembles de quatre enfants* de la classe. Supposons qu'il y ait vingt-quatre enfants dans la classe et six tables. Dans ce cas, on peut mettre les ensembles de quatre enfants en correspondance terme à terme avec l'ensemble des tables en mettant un ensemble de quatre enfants autour de chaque table. On remarquera que chaque ensemble de quatre enfants a une table où se mettre et que chaque table a ses quatre enfants autour d'elle. Il n'y a aucune table sans ensemble d'enfants, aucun ensemble d'enfants sans table. Dans ce cas, nous n'avons pas établi une correspondance entre l'ensemble des enfants et l'ensemble des tables, mais entre un ensemble d'ensembles de quatre enfants et l'ensemble des tables. La propriété commune de ces deux ensembles est, bien entendu, *le nombre six*. Le nombre quatre ne pénètre que par la petite porte.

On peut jouer de tels jeux avec les blocs logiques. Par exemple, on remarquera qu'il y a autant de pièces épaisses que de pièces minces, et qu'il est facile d'établir une correspondance terme à terme entre chaque pièce épaisse et la pièce mince correspondante. La plupart des enfants établiront une correspondance entre tous les attributs autres que l'épaisseur de toute pièce épaisse qu'ils joindront à une pièce mince. Ainsi, ils mettront un grand cercle jaune épais avec un grand cercle jaune mince, et ainsi de suite. Il ne faut pas les en empêcher, mais si un enfant suggère de procéder autrement, on le laissera faire ; bien plus, on l'y encouragera ! Il n'y a pas qu'une seule correspondance terme à terme entre deux ensembles, il y en a beaucoup. Il n'est pas obligatoire qu'un certain chapeau aille sur une certaine personne et sur elle seule. Tout chapeau en papier peut aller sur tout enfant, du moment qu'il ne reste aucun chapeau sans enfant ni aucun enfant sans chapeau. On peut faire correspondre un à un tous les blocs bleus avec tous les blocs jaunes et on verra, là encore, que la propriété numérique de l'ensemble des blocs bleus est la même que la propriété numérique de l'ensemble des blocs jaunes, et encore que celle de l'ensemble des blocs rouges. On peut encore faire correspondre les ronds bleus avec les carrés jaunes. Il y a autant de ronds bleus que de carrés jaunes, puisqu'on peut les faire correspondre terme à terme.

On pourra, bien entendu, demander aux enfants de bâtir des ensembles qui ne puissent pas être ainsi mis en correspondance. Par exemple, supposons qu'on leur dise : « Prenons les carrés bleus et prenons les grands rouges ». Il y a, naturellement, plus d'éléments dans l'ensemble des grands rouges que dans l'ensemble des carrés bleus. Les éléments de ces deux ensembles ne peuvent pas être mis en correspondance terme à terme. Au niveau des nombres, nous disons que le nombre d'éléments de l'ensemble des grands rouges est plus grand que le nombre d'éléments de l'ensemble des carrés bleus. La *possibilité* d'établir des ensembles en correspondance conduit à l'*égalité* de leurs propriétés numériques et l'*impossibilité* à l'*inégalité* de ces propriétés.

Il y a trois manières possibles d'exprimer l'inégalité. On peut dire, par exemple, que le nombre d'éléments de l'ensemble grand bleu n'est pas le même que le nombre d'éléments de l'ensemble de carrés rouges. « Pas le même » peut être symbolisé par le signe de l'égalité, mais barré (différent de) :

$$N\,\{\text{grands bleus}\} \neq N\,\{\text{carrés rouges}\}$$

On peut préciser l'information en disant qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble des grands bleus que dans celui des carrés rouges. Cela s'indique par le signe >

$$N\,\{\text{grands bleus}\} > N\,\{\text{carrés rouges}\}$$

De même, si nous voulons indiquer qu'il y a moins d'éléments dans l'ensemble des carrés rouges que dans celui des grands bleus, nous emploierons le signe $<$[1].

$$N\,\{\text{carrés rouges}\} < N\,\{\text{grands bleus}\}$$

Quant à la propriété numérique elle-même, on l'exprime, nous venons de le voir, en mettant la lettre N devant le signe de l'ensemble. Par exemple, nous écrivons l'égalité :

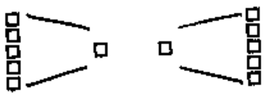
$$N\,\{\text{carrés rouges}\} = N\,\{\text{ronds bleus}\}$$

et cette égalité, c'est celle des propriétés numériques de ces deux ensembles. Il serait, bien entendu, inexact de dire que l'ensemble des carrés rouges est le même que l'ensemble des ronds bleus, tandis qu'il n'est pas inexact de dire que le nombre d'éléments de ces deux ensembles est le même. Ainsi, nous venons de montrer qu'on peut se placer à *deux niveaux différents* quand on parle d'égalité. Quand deux ensembles sont égaux, la signification est toute différente de ce qu'elle est quand le *nombre* des éléments de ces deux ensembles est le même. Ou encore, si nous voulons dire quelque chose de l'inégalité, nous pouvons écrire

$$N\,\{\text{grands rouges}\} > N\,\{\text{triangles jaunes}\}$$

Cette notation traduit le fait que si nous voulons établir une correspondance entre l'ensemble des grands rouges et l'ensemble des triangles jaunes, il va rester dans le premier ensemble un certain nombre d'éléments auxquels ne correspondra aucun élément dans le second ensemble. En présence d'une telle situation, nous disons que la propriété numérique du premier ensemble est plus grande que la propriété numérique du second ensemble. Il est tout aussi important de découvrir des *impossibilités* comme de découvrir des *possibilités*. Le fait qu'il soit *impossible* d'établir une correspondance terme à terme conduit à l'idée d'*inégalité*, c'est-à-dire à la *négation* de la propriété d'*égalité ;* la possibilité d'établir une correspondance terme à terme conduit à l'idée d'égalité entre les propriétés numériques convenables.

1. Les symboles $<$, $>$ seront facilement acquis par la manipulation des réglettes emboîtables :



(N. D. É.)

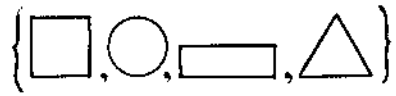
2.2. *Conservation du nombre*

On sait que, pour beaucoup de jeunes enfants, il y a plus d'objets sur une table quand ces objets sont éparpillés et occupent plus de place sur la table que quand ils sont serrés les uns contre les autres, bien que leur nombre soit en réalité le même dans les deux cas. Les enfants, dans les débuts, considèrent les termes « plus » et « moins » comme signifiant « prenant plus de place » ou « prenant moins de place ». Les jeux de correspondance terme à terme contribueront beaucoup à développer en profondeur leurs concepts sur ce point. Il est bon, toutefois, de faire faire aux enfants des « exercices de conservation » pour bien leur faire sentir que les propriétés numériques d'un ensemble ne changent pas avec la disposition de ses éléments. Par exemple, on prendra des perles et on les mettra tantôt dans une flûte à champagne, haute et étroite, tantôt dans une assiette plate. Pour commencer, on mettra une perle dans la flûte et une perle dans l'assiette, puis deux dans chaque, puis trois. Inutile d'exiger des enfants une réponse numérique ; il suffit, à n'importe quel stade, de leur demander s'ils croient qu'il y a plus de perles dans le verre ou dans l'assiette. Certains enfants penseront que ce sont les perles de l'assiette qui sont les plus nombreuses, parce qu'elles sont éparpillées, d'autres croiront que c'est dans le verre parce que la *hauteur* est plus grande. La plupart des enfants, toutefois, conviendront que, puisqu'à aucun moment on n'a mis plus de perles dans l'un des récipients que dans l'autre, le nombre de perles doit être le même dans les deux. Ces exercices fourniront un critère non-perceptuel, c'est-à-dire celui de la correspondance un-à-un, pour décider si des ensembles contiennent ou non le même nombre d'éléments. Qui plus est, l'acquisition de ce critère sera plus efficace dans la mesure où les enfants prendront personnellement part à sa vérification.

Les enfants trouvent beaucoup plus difficiles les exercices analogues intéressant la longueur, la surface et le volume. Beaucoup d'enfants, quand on met côte à côte deux règles de même longueur, mais sans que leurs extrémités coïncident, trouvent que la règle dont l'extrémité est à droite est plus longue. De même, si on prend de l'eau contenue dans un récipient large et peu profond et qu'on la verse dans un récipient étroit et profond, ils croient que la même quantité d'eau, versée dans ce récipient haut et mince, fait « plus d'eau ». On constate souvent qu'en leur disant qu'on n'a pas ajouté d'eau, cela n'ébranle aucunement leur conviction! Certains enfants s'obstinent alors à dire qu'on voit bien qu'il y a plus d'eau. Cela signifie que l'idée de volume (ou de capacité) n'est pas encore fixée dans leur esprit de manière utilisable. Ils n'ont pas encore compris quelles sont les transformations qui, en fait, laissent inchangés les volumes, les longueurs et, en général, toutes quantités. Si, dans ce cas, on obtient des réponses fausses à plusieurs reprises, mieux vaut abandonner l'exercice : il est manifestement prématuré pour ces enfants. Mieux vaut alors continuer à mettre en œuvre de nombreux récipients différents (dans le cas de volumes) et faire confiance au processus de maturation et de développement progressif de la compréhension profonde : la lumière finira par jaillir. Quelques semaines plus tard, il peut fort bien se faire qu'on obtienne des réponses très différentes : la notion de conservation s'est installée.

2.3. *Le concept de succession*

Nous avons vu qu'on peut établir un *ordre* entre les nombres, introduits en tant que propriétés de certaines classes d'ensembles, en prenant pour critère qu'il est impossible d'établir une correspondance élément par élément entre ensembles appartenant à des classes différentes. Par exemple, si on veut établir une relation d'ordre entre 2 et 4, il faut prendre un ensemble appartenant à la classe de tous les ensembles qui possèdent la propriété « deux » et un ensemble appartenant à la classe de tous les ensembles qui possèdent la propriété « quatre ». Par exemple, nous pourrions prendre les ensembles

{Sylvain, Catherine} et 

Si nous essayons d'établir une correspondance terme à terme entre le premier ensemble et le second, il est clair que nous échouerons à tous les coups. Il restera toujours certains éléments du second ensemble qui n'auront pas pu être mis en correspondance avec un élément quelconque du premier ensemble. Dans ce cas, en généralisant à toutes les paires possibles d'ensembles qu'on aurait pu prendre respectivement en classe 2 et en classe 4, on peut dire que 2 est moins que 4 ou que 4 est plus que 2. On dispose ainsi d'un critère toujours utilisable pour déterminer si un nombre est plus grand qu'un autre, ou plus petit qu'un autre, ou si ces deux nombres sont égaux, même si l'on arrive à ce résultat par des voies différentes :

$$2+3=2\times4-3.$$

L'idée d'ordre ne nous donne pas encore celle de *succession* ou de voisinage. Quel est le nombre « voisin », « suivant » d'un nombre donné ? C'est celui qui se rapporte aux ensembles ayant un élément de plus que les ensembles auxquels s'applique notre nombre. Aussi, pour introduire l'idée de succession est-il nécessaire d'introduire celle de « un de plus ». Bien entendu, les enfants peuvent apprendre à « compter » en répétant la série conventionnelle des adjectifs numéraux, des nombres cardinaux. Avec cette série, l'enfant n'a aucun besoin de savoir que pour obtenir le « suivant » de 5 il faut ajouter 1 à 5 et obtenir 6. Il lui suffit de réciter la suite de mots qu'il a apprise par cœur, et celui qui vient après « cinq » sera « le suivant » et il saura que c'est

« six ». Mais cette façon de faire laisse complètement séparées les idées de « un de plus », de « voisin » et de « suivant ». Il a été amplement démontré que tant que les enfants n'ont pas dans une certaine mesure réussi à faire la synthèse entre ces deux idées, tout leur travail sur les nombres risque d'être fait « au petit bonheur la chance », et ils ne sont pas capables de raisonner efficacement sur les situations arithmétiques les plus simples.

Le jeu décrit en 4.2 (p. 47) peut être rendu indépendant de toute base de numération, voire de la connaissance des nombres, en faisant construire aux enfants des piles de cubes de manière récurrente, c'est-à-dire en se référant à la pile précédente chaque fois qu'ils construisent la pile suivante[1].

Le premier exercice est très simple. Prendre un objet. On a la première pile.

Ensuite, construire un ensemble équivalent au premier ensemble (ou à la première pile). Autrement dit, l'enfant doit sortir un autre objet. Puis on lui demande de mettre un autre objet avec cet objet. Il a alors construit son second ensemble (sa deuxième pile).

Ensuite, on construit un ensemble équivalent au second ensemble. Cela fait, on prend un autre objet et on le joint à l'ensemble qui vient d'être construit. On a maintenant réalisé le troisième ensemble.

Ensuite, de nouveau, on « copie » le dernier ensemble, c'est-à-dire qu'on construit un ensemble équivalent au troisième ensemble. On ajoute un objet à ce nouvel ensemble, et voilà le quatrième ensemble.

On continue de la sorte aussi longtemps que possible, de préférence jusqu'à ce que l'enfant ait perdu le compte du nombre d'objets entrant dans la composition des piles successives.

Maintenant, la maîtresse montre les deux premières piles et demande aux enfants qui ont assisté à la construction de la série laquelle a le plus d'objets. La question suivante est : « Combien d'objets en plus y a-t-il dans la plus grande des deux ? ». Poursuivant l'interrogatoire, on remonte la série, en montrant toujours deux piles consécutives. Les enfants ne sont pas longs à saisir que la pile « suivante » a toujours un objet de plus, puisque d'ailleurs c'est ainsi qu'on l'a constituée.

L'étape suivante pourrait consister *à montrer* la première et la troisième piles, puis la seconde et la quatrième, puis la troisième et la cinquième (mais bien entendu sans *prononcer* les adjectifs ordinaux !), et à poser les mêmes questions. Beaucoup d'enfants qui auront répondu avec succès à la série de questions précédente vont commencer par croire :

a) ou bien que la plus grande pile comprend maintenant trois ou quatre éléments de plus que la plus petite, même si elle n'est qu'à deux intervalles de la précédente,

b) ou bien que la plus grande pile a seulement un élément de plus que la plus petite. Si on leur demande pourquoi ils répondent ainsi,

1. Ce jeu est dû à P. Greco, dans une forme légèrement différente. Voir Études, XIII, *sur la construction du nombre.*

ils disent, dans le premier cas, que maintenant les piles sont tellement grandes que les plus grandes doivent être beaucoup plus grandes que les plus petites, et, dans le second cas, que les piles sont tellement grandes qu'elles sont presque pareilles et qu'il n'y a pas tant de différence.

Il est évident que ces enfants n'ont pas encore établi un lien utilisable entre la succession des nombres et les quantités qu'ils représentent. Tout en sachant que un et un font deux, ils ne réalisent pas qu'un de plus et un de plus c'est deux de plus. On verra que lorsque les enfants ont joué avec les *états* et les *opérateurs*, et ont établi des équivalences entre des successions d'opérateurs et des opérateurs isolés, les difficultés que nous venons d'évoquer disparaissent dans une large mesure.

2.4. *Addition et soustraction*

Nous avons vu dans notre section sur les ensembles que l'expérience préalable nécessaire à l'addition des nombres est la réunion d'ensembles qui n'ont pas d'éléments communs. Il est intéressant de demander maintenant aux enfants quelle est la propriété numérique de l'ensemble réalisé par la réunion de deux ensembles dont ils connaissent déjà les propriétés numériques. Cela ne va pas présenter de difficulté particulière, car une fois les deux ensembles réunis, les enfants vont tout simplement compter la totalité des éléments. Réfléchissons un instant à ce que cela signifie. Que font-ils quant ils « comptent »? Ils établissent, c'est évident, une correspondance terme à terme, entre les éléments de l'ensemble à « compter » et les éléments d'un ensemble de « mots étalons » tenu en réserve dans la mémoire. Dans notre exemple, ils établissent la correspondance entre les éléments de l'ensemble

$$\{\text{un, deux, trois, quatre, cinq, six...}\}$$

et les éléments de l'ensemble de tables qu'il s'agit de « compter ». Compter n'est qu'un cas particulier d'établissement d'une correspondance entre ensembles, l'un des ensembles étant un ensemble-étalon, une espèce de monnaie internationale en fonction de laquelle on *mesure* tout ensemble. Il convient de se rappeler que cette mesure est assurée par toute une série d'ensembles dont le premier est {un}, le second {un, deux}, le troisième {un, deux, trois}, et ainsi de suite.

Supposons, par exemple, que l'ensemble des garçons de la classe ait la propriété numérique quinze, et que l'ensemble des filles de la classe ait la propriété numérique seize. La propriété numérique de la réunion de ces deux ensembles sera alors trente-et-un. Or, la réunion de ces deux ensembles constitue celui des enfants de la classe, de sorte qu'au niveau des ensembles on peut dire :

$$\{\text{garçons}\} \cup \{\text{filles}\} = \{\text{enfants de la classe}\}$$

Pour passer au niveau suivant d'abstraction, il nous faudrait dire : $N\{\text{garçons}\} + N\{\text{filles}\} = N\{\text{enfants de la classe}\}$. Or, le premier terme de cette équation s'écrit habituellement avec les chiffres 15 et le second avec les chiffres 16, tandis que le second membre de l'équation s'écrit 31. En définitive, écrire $15 + 16 = 31$ serait une manière à la fois plus courante et plus « avancée » d'écrire cette relation particulière. Bien entendu, il peut être sage de ne pas commencer par des nombres à deux chiffres, dont la complexité relative peut dérouter les enfants à ce stade : ils risquent fort de ne pas saisir tout ce qui est implicitement contenu dans le « un » et le « cinq » de 15 ou dans le « trois » et le « un » de 31. Naturellement, la plupart des enfants admettent sans difficulté que quinze s'écrive avec un 1 suivi d'un 5, mais ils le confondent parfois avec 51 quand ils n'ont pas encore acquis solidement la notion de valeur positionnelle. Mais si on leur apprend que 15 représente le mot quinze et 16 le mot seize, et qu'on ne fait aucune tentative pour décomposer le symbole en ses éléments, 1 se rapportant à *un* ensemble de dix et 5 à cinq objets, on ne leur aura fait aucun mal. Nous croyons, toutefois, qu'il est plus sûr, dans les débuts, de s'en tenir à de petits nombres ; les enfants acquerront l'idée d'addition aussi efficacement avec des petits nombres qu'avec des grands, et sans doute même plus efficacement [1].

L'opération de soustraction d'un nombre d'un autre nombre est de toute évidence le correspondant numérique de l'opération de recherche de l'ensemble-différence entre deux ensembles. Soit l'ensemble constitué par les garçons et le sous-ensemble formé par les garçons aux cheveux blonds ; on peut enlever ce sous-ensemble, et alors la différence entre l'ensemble des garçons et l'ensemble des garçons aux cheveux blonds est constituée par l'ensemble des garçons qui n'ont pas les cheveux blonds. Supposons maintenant que la propriété numérique de l'ensemble des garçons soit dix et celle de l'ensemble des garçons blonds trois : la propriété numérique de l'ensemble-différence sera alors sept. Le calcul de la propriété numérique de l'ensemble-différence de deux ensembles constitue l'opération de soustraction. De même le calcul de la propriété numérique de l'ensemble formé par la réunion de deux ensembles constitue l'opération arithmétique que nous appelons addition.

2.5. *Multiplication*

On peut introduire la multiplication en faisant appel à une opération assez intéressante touchant aux ensembles et connue sous le nom

1. Il existe actuellement deux systèmes, mis au point aux États-Unis, l'un par Patrick Suppes et l'autre par Paul Rosenbloom, qui permettent de tirer les idées et les techniques de l'addition, voire de la soustraction, de l'expérience antérieurement acquise en matière d'ensembles et d'opérations sur les ensembles.

de *produit cartésien*. Supposons que nous ayons deux ensembles : un ensemble de chapeaux et un ensemble d'enfants. Il n'est pas nécessaire qu'il y ait autant de chapeaux que d'enfants. Examinons toutes les manières possibles de mettre un chapeau à un enfant et formons un nouvel ensemble avec toutes les paires qu'on peut constituer avec un enfant et un chapeau. Admettons qu'il y ait cinq enfants et trois chapeaux : chacun des cinq enfants peut mettre l'un quelconque des trois chapeaux. Ainsi, le premier enfant aura trois manières de mettre un chapeau ; il en sera de même du second, de même du troisième, de même du quatrième et de même du cinquième. Cela fera, en tout, quinze combinaisons. L'ensemble de toutes les combinaisons possibles entre un chapeau et un enfant est appelé *produit* de *l'ensemble des chapeaux* par *l'ensemble des enfants*.

Prenons un autre exemple. Nous disposons sept haricots en une rangée et constituons ainsi un ensemble de haricots. Disposons en dessous, sur une seconde rangée, un second ensemble de sept haricots, puis, en dessous, une troisième rangée, encore de sept haricots. Nous avons ainsi trois rangées, c'est-à-dire trois ensembles de haricots, et dans chaque ensemble il y a sept éléments. Et maintenant, comment construire le produit certésien entre l'ensemble des haricots d'une rangée et l'ensemble des rangées que nous avons disposées sur la table ? Ce serait le moment de se rappeler les équivalences entre ensembles et de constater que l'ensemble des *colonnes* ainsi formées est un ensemble équivalent de l'ensemble des haricots de l'une quelconque des *rangées*. En d'autres termes, il y a autant de colonnes de haricots dans notre disposition qu'il y a de haricots dans une rangée donnée. On peut donc, pour l'établissement du produit cartésien, remplacer l'ensemble des haricots d'une rangée par l'ensemble des colonnes. Ce sera plus facile parce qu'alors on n'aura pas besoin de choisir une rangée particulière de haricots pour former le produit par l'ensemble des rangées. Formons donc le produit de l'ensemble des colonnes par l'ensemble des rangées. Ce produit va consister en toutes les paires possibles formées d'une colonne et d'une rangée. Autrement dit, on peut faire une paire avec la première rangée et la première colonne, une paire avec la deuxième rangée et la première colonne, une paire avec la troisième rangée et la première colonne, une paire avec la première rangée et la deuxième colonne, et ainsi de suite. En tout, il y a vingt et une paires, ce qui est précisément le nombre de harictots posés sur la table, car chaque haricot se trouve à l'intersection d'une, et d'une seule rangée avec une, et une seule colonne. Nous ne voulons pas dire pour autant que l'introduction du produit cartésien constitue la meilleure manière d'introduire la multiplication. Elle ne l'est peut-être pas, mais ce que nous voulons dire, c'est qu'y recourir constitue peut-être une manière d'occuper les enfants les plus doués pendant que les autres, plus lents, seront en train de rattraper leur retard dans la formation des concepts d'addition et de soustraction.

L'une des difficultés qui ne ressort pas immédiatement de ce qui précède, c'est qu'il faut que les enfants comprennent bien que *l'ensemble de haricots* de l'exemple ci-dessus est un ensemble équivalent de *l'ensemble de paires de rangées et de colonnes*. A chaque paire formée d'une rangée et d'une colonne correspond un et un seul haricot. Et à chaque haricot correspond une et une seule paire formée d'une rangée et d'une colonne. De la sorte, la propriété numérique de l'ensemble de paires de rangées et de colonnes doit être la même que la propriété numérique de l'ensemble de haricots disposés sur la table. C'est la raison, d'ailleurs, pour laquelle cette forme de multiplication est peut-être un peu artificielle.

L'introduction courante consistera à laisser les enfants compter les ensembles équivalents et former des ensembles d'ensembles équivalents, puis compter les éléments de ces ensembles d'ensembles. Autrement dit, dans le cas des haricots, on a fait trois ensembles équivalents de haricots. Ils sont équivalents puisque chacun est composé de sept haricots. Puis il y a un ensemble d'ensembles, c'est-à-dire un ensemble de rangées dans ce cas ; l'ensemble de rangées possède la propriété numérique de trois et chaque ensemble de haricots a la propriété numérique de sept. Si donc nous formons la réunion des ensembles de haricots que nous avons disposés en rangées et si nous calculons la propriété numérique de cet ensemble-réunion, nous obtenons un troisième ensemble dont la propriété numérique est vingt et un. C'est le produit des propriétés numériques de l'ensemble des rangées et de l'ensemble des haricots de chaque rangée.

Appelons R l'ensemble des rangées de haricots et appelons H_1, H_2 ou H_3 ou, encore, en résumé, H, si nous ne souhaitons pas faire de différence entre les rangées, l'ensemble des haricots de chaque rangée. Les propriétés numériques sont alors :

$$N\{H\} = 7$$
$$N\{R\} = 3$$

D'autre part, la réunion de H_1, H_2 et H_3, c'est-à-dire

$$\{H_1 \cup H_2 \cup H_3\}$$

constitue l'ensemble-réunion dont nous voulons calculer la propriété numérique. Cette propriété numérique, c'est le produit des deux nombres 3 et 7. Si on appelle P l'ensemble-réunion, on a

$$N\{P\} = N\{H\} \times N\{R\}$$

et « multiplié par » est l'opération nécessaire au calcul de la propriété numérique de l'ensemble-réunion en cause.

Il est important de saisir que dans cette opération on est allé au-delà de l'idée d'addition. Il est vrai qu'on obtient la même solution au problème en additionnant les trois termes qu'en multipliant par trois. Mais ce n'est pas parce que la réponse est la même que l'opération est la même. La multiplication implique une nouvelle sorte de variable, à savoir le multiplicateur, qui compte des *ensembles*. Le multiplicateur est une propriété des ensembles d'ensembles. Le multiplicande est une propriété des ensembles. Aussi les deux facteurs ne se rapportent-ils pas au même univers. En fait, il n'y a pas de facteurs dans le cas de l'addition, parce que le nombre d'éléments à additionner est sans incidence sur la nature du problème. Les maîtres qui enseignent que la multiplication n'est qu'une addition répétée rendent un mauvais service à leurs élèves. En réalité, ils leur cachent la difficulté et, même, leur assènent une contre-vérité. Il est peut-être utile de se rendre compte de ce que la structure logique de l'arithmétique demeure relativement simple tant qu'il ne s'agit que de l'addition et de la soustraction, alors que l'introduction de la multiplication pose des problèmes tout différents. Il en résulte – et cela, les maîtres ne doivent jamais l'oublier – une difficulté d'un ordre plus grand dans l'acquisition du concept de multiplication, comparée à celle du concept d'addition. Dans la multiplication, on a affaire à deux univers différents à la fois, alors que dans l'addition il ne s'agit que d'un seul univers, celui des ensembles. Dans l'addition, tout nombre se rapporte au même univers, celui des ensembles. Dans la multiplication, au contraire, certains nombres se rapportent aux ensembles et d'autres aux ensembles d'ensembles. C'est là un différence considérable, et les exercices que les enfants auront faits avec des ensembles, et avec des ensembles d'ensembles, et même avec des ensembles d'ensembles d'ensembles, les aideront considérablement, par la suite, à se colleter avec les problèmes que leur posera la multiplication.

2.6. *Division*

Un moment vient où il faut introduire la division. La forme la plus simple de division, c'est le partage. On a un ensemble et il s'agit de le séparer en un certain nombre de sous-ensembles équivalents. Le résultat de la division, c'est le nombre d'éléments qu'il y aura dans chacun de ces sous-ensembles. Supposons, par exemple, un ensemble de 12 noix, qu'il s'agit de répartir en quatre sous-ensembles équivalents : le résultat recherché, c'est la propriété numérique de chacun de ces sous-ensembles. C'est 3, bien entendu. Quand on partage l'ensemble de 12 noix en 4 sous-ensembles, la propriété numérique de chacun de ces sous-ensembles équivalents est 3. C'est assez facile à faire, et les enfants comprennent que c'est en quelque sorte l'opposé de ce qu'on fait quand on multiplie. Quand on multiplie, on a l'ensemble d'ensembles et sa propriété numérique ainsi que la propriété numérique de chacun des ensembles dont est composé l'ensemble d'ensembles. Le problème est de trouver la propriété numérique de la réunion de tous ces ensembles qui sont les éléments de l'ensemble d'ensembles. Dans la division, on part de la propriété numérique de la réunion des ensembles d'ensembles ; on a également la propriété numérique de l'ensemble d'ensembles et on cherche la propriété numérique de chaque ensemble dont l'ensemble d'ensembles est composé.

Première situation :

$N\{E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots E_n\}$.
et $N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = \ldots N\{E_n\}$ sont connus

Problème :

Quelle est la réponse à $N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots\ldots \cup E_n\}$?
C'est par la multiplication que l'on résout le problème.

Deuxième situation :

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots, E_n\}$
et $N\{E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots\ldots E_n\}$ sont connus
et on sait que
$N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = N \ldots\ldots (E_n)$

Problème :

Quelle est la valeur commune de $N\{E_i\}$?
Ce problème a sa solution dans une division.

Troisième situation :

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots E_n\}$
et $N\{E_i\}$ est connu.

Problème :

Quelle est la valeur de $N\{E_1, E_2, E_3 \ldots\}$?
Ce problème a également sa solution dans la division.

Quant aux moyens de venir à bout des difficultés inhérentes à la structure ci-dessus, nous les avons indiqués ci-dessous p. 114.

3. États et opérateurs

3.1. *États et opérateurs en mathématique*

Une bonne partie de la mathématique se rapporte à l'étude des états et à l'étude des opérateurs qui entraînent la transformation de ces états en d'autres états. Par exemple, l'addition constitue une situation de ce genre. Il en est de même de la soustraction et de toute autre opération arithmétique. Dans l'addition, on a la situation suivante :

Soit un état d'origine, par exemple la propriété numérique d'un certain ensemble : trois livres posés sur la table. Cet ensemble de trois livres est l'ensemble d'origine et sa propriété numérique, trois, constitue l'état d'origine. Effectuons maintenant une transformation. Elle peut être de réunir cet ensemble de trois livres à un autre ensemble, de quatre livres, qu'on vient de poser sur la table. L'opérateur, c'est la propriété numérique de l'ensemble qui vient d'être posé, et qu'il s'agit de réunir à l'ensemble existant à l'origine sur la table. La propriété numérique de l'ensemble original est trois, et la propriété numérique de l'opérateur est quatre. Bien entendu, une fois que les deux ensembles sont réunis, l'état de la table se trouve modifié. Il y a, dessus, un nouvel ensemble, et sa propriété numérique est constituée par l'état modifié. Elle est de sept. Ainsi, ce qui s'est passé, c'est qu'à l'« état-trois » a été appliqué un opérateur « ajouter quatre », ce qui a donné un « état-sept ». On peut en dire autant de la multiplication. A l'« état-trois » qui est sur la table on applique l'opérateur « multiplier par quatre ». Cela signifie que, sur une autre table par exemple, nous voulons créer un état dans lequel il y aura quatre fois autant de livres. Nous allons considérer un ensemble d'ensembles tel que dans chacun de ces ensembles il y aura trois livres et qu'ainsi cet ensemble d'ensembles comprendra un ensemble de trois livres, un autre ensemble de trois livres, un autre ensemble de trois livres et encore un autre ensemble de trois livres. La propriété numérique de cet ensemble d'ensembles est, naturellement, quatre, et c'est là notre opérateur qui agit maintenant en tant que multiplicateur. Le nouvel état qui a été engendré s'obtient en calculant la propriété numérique de la réunion de tous les ensembles de livres qui viennent d'être posés sur la table. Cette propriété numérique est de douze. Ainsi, dans ce cas, on est parti d'un « état trois » et par une opération de « multiplication par quatre » on a obtenu un « état de douze ». Bien entendu, on peut utiliser les états et les opérateurs à bien autre chose qu'à compter l'appartenance à des ensembles et à modifier cette appartenance en réunissant d'autres ensembles à l'ensemble d'origine. Par exemple, on peut dire de l'état d'un enfant de la classe qu'il est d'être debout dans un coin de la pièce. On peut ensuite lui appliquer un opérateur (par exemple, faire deux pas en avant) qui le place en un autre endroit de la pièce. On peut tout aussi bien lui donner d'autres ordres, comme de faire des pas de côté ou en arrière, ou de s'asseoir, ou de monter sur une chaise, et ainsi de suite. Dans chacun de ces cas, l'état initial est la position dans laquelle se trouvait l'enfant jusqu'au moment où, par un opérateur, cet état a été transformé en un autre état.

On peut jouer à changer les états avec les interrupteurs électriques. Par exemple, l'état de la pièce est « éclairé ». On actionne l'interrupteur : c'est l'opérateur. Ayant actionné l'interrupteur, l'état de la pièce est différent, à savoir « obscur ». Et si on actionne de nouveau l'interrupteur, l'état change encore une fois. Voilà un ensemble de changements très simple. Il n'y a qu'à actionner l'interrupteur. On peut compliquer le jeu avec deux interrupteurs, commandant chacun une lampe différente. On a alors trois sortes de changements – actionner l'un des interrupteurs, actionner l'autre interrupteur, actionner les deux interrupteurs à la fois. On peut même, si on veut, pour compléter le tableau, y inclure l'opérateur qui consiste à n'actionner aucun interrupteur. Mais c'est un peu compliqué, et il ne faut pas aller trop vite. « Ne rien faire » en tant qu'opérateur correspond à zéro dans l'addition et à un dans la multiplication.

Nous avons décrit des jeux de ce genre dans notre II^e partie. Jouer à prendre un opérateur pour passer d'un état initial à un état final, c'est, si vous voulez, jouer à des jeux état-opérateur-état.

3.2. *Les opérateurs inverses en général*

Après avoir joué à quelques jeux état-opérateur-état, on peut se demander ce qu'il faut faire pour revenir à l'état initial. Par exemple, si on a fait trois pas en avant, que faut-il faire pour se retrouver dans l'état où on était avant l'opération ? Trois pas en arrière, c'est certain. Le déplacement, la transformation, l'opération de faire trois pas en avant sont « annulés » par le mouvement qui consiste à faire trois pas en arrière. De même, deux pas à droite sont annulés par deux pas à gauche, et une intervention sur l'interrupteur est annulée par l'intervention suivante : s'il y avait de la lumière avant qu'on l'actionne, il y en aura de nouveau quand on l'actionnera une seconde fois, et de même si l'obscurité régnait au début, elle régnera encore quand on aura actionné deux fois l'interrupteur. Il n'en est pas tout à fait de même dans le cas des deux pas en avant. Si, après avoir fait deux pas en avant, on en fait encore deux en avant, on ne se trouve nullement ramené au point de départ : on s'en trouve encore plus éloigné, alors que si on veut se retrouver au point de départ, il faut faire deux pas en arrière, c'est-à-dire en sens contraire. Prenons un autre exemple : si on dit « faites demi-tour sur place » deux fois de suite, l'exécutant se retrouve dans sa position initiale ; s'il était face au tableau noir, il est encore face au tableau noir après deux demi-tours. De même, si on retourne un cahier sur son envers, puis si on lui fait faire encore un demi-tour dans le même sens : on est dans le même cas que pour l'interrupteur. On peut jouer ainsi à divers jeux « opérateur-état-opérateur » avec les enfants. On peut, par exemple, reprendre le cahier et voir si on ne peut pas imaginer d'autres mouvements. On peut le faire tourner, en effet, de différentes façons : on peut le basculer en ramenant le haut vers soi (ou en éloignant de soi le bas, ce qui est équivalent), ce qui constitue un premier mouvement ; on peut aussi le faire tourner comme on tourne une page, de droite à gauche (ou de gauche à droite, c'est la même chose), ce qui fait un second mouvement. Si on attache de l'importance au sens dans lequel se trouve le cahier après sa rotation, ces deux mouvements ne sont pas équivalents : dans le premier, la couverture arrière du cahier, où est généralement imprimée une table de multiplication, se retrouve tête-bêche, et la table est à l'envers ; dans le second mouvement, au contraire, elle demeure dans le sens de la lecture. Enfin, on peut faire tourner le cahier à plat sur lui-même sans le soulever de la table, de sorte que le dessus demeure dessus et le dessous en dessous, mais que les inscriptions de la couverture se retrouvent à l'envers :

1 2 3

Il y a donc trois manières de tourner le cahier, et celui-ci peut être dans quatre états différents : recto apparent à l'endroit, verso apparent à l'endroit, verso apparent à l'envers, recto apparent à l'envers. Quant aux transformations, nous en avons considéré trois jusqu'à présent (voir figure). Il y en a une quatrième qui consiste à ne rien faire du tout, qui correspond à l'absence d'action sur l'interrupteur. Il sera intéressant de voir combien d'enfants saisissent que les règles du jeu du cahier sont les mêmes que celles de l'interrupteur.

3.3. *Les opérateurs inverses en arithmétique*

Ayant joué à des jeux qui rétablissent la situation originale, on peut appliquer cette expérience à l'étude des opérations qui rétablissent la situation dans le cas de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. Par exemple, si on a sur la table un « état-sept » parce qu'on y a mis sept livres, on peut exécuter une opération d'enlèvement d'un ensemble, effectuant par là la soustraction de sept du nombre correspondant ; si on enlève trois livres, c'est-à-dire un sous-ensemble de trois livres appartenant à l'ensemble de sept livres, l'ensemble-différence restant aura la propriété numérique de quatre. Que faut-il faire pour rétablir la situation dans son état initial ? Il est évident qu'il faut remplacer l'ensemble enlevé par un ensemble équivalent quelconque. Si on remplace l'ensemble qui avait été enlevé par un autre ensemble quelconque équivalent à l'ensemble enlevé, on rétablit la situation *arithmétique* dans son état antérieur, même si on n'a pas rétabli la situation matérielle exacte de l'ensemble. En d'autres termes, on aurait pu remettre trois pommes à la place des trois livres. Il y aurait néanmoins un ensemble d'éléments, résultant de la réunion de l'ensemble des quatre livres avec l'ensemble des trois pommes, qui sera équivalent à l'ensemble de sept livres. Ainsi, en ce sens, les opérations de retrancher trois et d'ajouter trois sont des opérations inverses l'une de l'autre. Si on ajoute trois après avoir retranché trois, on se trouve ramené au point de départ. Les maîtres ne se rendent pas toujours compte à quel point c'est peu évident. Il n'est pas immédiatement évident que la soustraction est l'inverse de l'addition, et il n'est pas non plus évident que l'addition est l'inverse de la soustraction. Ces relations, il faut les apprendre, et si on n'a pas prévu cette acquisition, elle peut ne pas intervenir.

Un autre jeu qu'il est essentiel de jouer, c'est celui qui consiste à trouver l'opérateur qui conduit d'un certain état à un autre état. Supposons qu'on ait un état de cinq, et qu'on veuille aboutir à un état de sept, quelle opération faut-il faire ? Ou encore, supposons qu'on ait fait intervenir un opérateur de trois et qu'on soit arrivé à un état de sept, de quel état était-on parti ? On peut, naturellement, combiner additions et soustractions de manière à rendre le jeu plus complexe, et les enfants prennent grand plaisir à compliquer eux-mêmes progressivement ces problèmes.

Pour jouer à ces jeux, on peut concrétiser la situation initiale en disposant un récipient sur la table, destiné à indiquer l'« état » de la table, et mettre dans la main d'un enfant un autre récipient, qui représentera l'« opérateur ». On place un certain nombre d'objets dans le récipient « état » de la table. Quant au récipient « opérateur » il peut servir comme « appareil qui complète » ou comme « appareil qui enlève ». On met un certain nombre de choses dans le « récipient opérateur » puis on fait la réunion de cet ensemble de choses avec l'ensemble de choses qui est sur la table. L'état qui en résulte sur la table est celui qui a été provoqué par l'opérateur qui complète. On peut de même utiliser le « récipient opérateur » pour enlever des sous-ensembles de la table. L'état qui en résulte sur la table est celui qui a été provoqué par l'opération d'enlèvement.

Supposons qu'on ait sur la table un état de 7, c'est-à-dire un ensemble dont la propriété numérique est sept. On peut poser les problèmes suivants :

	État initial		opérateur		second état
(1)	7		+ 3	=	□
(2)	7	+	□	=	10
(3)	10	−	□	=	7
(4)	10	−	7	=	□
(5)	□	−	7	=	3
(6)	□	÷	3	=	7

On pourra ensuite discuter des raisons pour lesquelles les réponses aux problèmes (2), (3) et (4), par exemple, sont constituées par le même nombre, à savoir trois. Si les enfants restent muets, il faut leur procurer de nouvelles expériences de compréhension des propriétés inverses. Ainsi :

État initial 7	Opérateur + 3	
	Second état 10	Opérateur − 3
		Troisième état □
Ou encore État initial 7	Opérateur + 3	
	Second état 10	Opérateur □
		Troisième état 7

Là, il s'agit non seulement de déterminer la valeur de l'opérateur, mais encore son espèce.

Si c'est encore le mutisme, on poussera plus loin les expériences. Par exemple :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur		Troisième état
	□	7	+ 3	=	10

Ces exercices finissent toujours par faire découvrir que l'addition et la soustraction sont inverses l'une de l'autre.

3.4. *Combinaison des opérateurs. Propriété associative*

Naturellement, on peut allonger les « chaînes » ci-dessus, et augmenter le nombre des « maillons manquants », ou raccourcir des chaînes plus longues. Par exemple :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	Troisième état	Opérateur	Quatrième état
10	+3	13	–4	9	+2	11

Peut-on « sauter » le second état ? Comment peut-on passer du premier état au troisième en n'utilisant *qu'un seul opérateur* ? Il est clair que cet opérateur unique sera « ôter 1 » ou « – 1 ». On peut donc raccourcir la chaîne comme suit :

État initial	Opérateur	Etat suivant	Opérateur	État final
10	–1	9	+2	11

Dans cet exercice de raccourcissement, on a remplacé la succession des opérateurs « ajouter trois » et « retrancher quatre » par l'opérateur unique « retrancher un ». Arithmétiquement, on est passé de

$$(10 + 3) - 4 \text{ à } 10 - 1$$

et $+ 3 - 4$ a été remplacé par $- 1$. *Qu'on n'aille surtout pas penser* que nous parlons ici de nombres positifs et de nombres négatifs ! Nous ne parlons que d'additions, de soustractions et de leurs interconnexions.

Nous avons, cependant, fait un pas important en avant. Au lieu de combiner des états et des opérateurs et d'obtenir les états qui en résultent, nous avons combiné les opérateurs et obtenu les opérateurs qui en résultent ! Avant d'établir ces relations entre opérateurs, il va falloir se servir de la même série d'opérateurs en partant d'états différents. On remarquera qu'une succession d'opérations d'addition et/ ou d'opérations de soustraction équivaut à un seul de ces opérateurs, indépendamment de l'état initial. Par exemple :

« ajouter trois » suivi d'« ajouter quatre » aura *toujours* le même effet que l'opération isolée de

« ajouter sept »

C'est là une situation très différente de celle dans laquelle on prend un état de trois, on opère dessus à l'aide de l'opérateur « ajouter quatre » et on obtient un état de sept. On est passé, en somme des jeux opérateur-état-opérateur à ce qu'on pourrait appeler des jeux

opérateur-opérateur-opérateur

En plus court, on joue à « op – op – op ».

Maintenant que nous avons appris aux enfants à jouer à différents jeux d'addition et de soustraction, il serait peut-être temps de nous occuper des propriétés de ces opérations. Certains d'entre eux se sont peut-être déjà aperçus que l'ordre dans lequel on additionne était sans incidence sur le résultat. Il s'agit de la propriété de *commutativité*. Elle est la conséquence directe de la propriété de commutativité des réunions d'ensembles. La réunion d'un ensemble avec un autre ensemble donne le même ensemble-réunion indépendamment de l'ordre dans lequel on exécute l'opération :

$$\{\square\nabla\} \cup \{O\} = \{\square\nabla O\}$$
$$\{O\} \cup \{\square\nabla\} = \{\square\nabla O\}$$

De ce fait, la propriété numérique de l'ensemble-réunion ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compte le nombre des éléments des deux ensembles qui sont entrés dans sa composition. On peut faire des exercices sur ce sujet, en posant, par exemple, la question : « Deux et trois, c'est la même chose que trois et quoi ? » On voit que l'état et l'opérateur sont interchangeables. Ou encore, on peut demander : « Ajouter cinq et ajouter six, c'est la même chose qu'ajouter six et ajouter quoi ? »

Une autre propriété importante, c'est *l'associativité* que possèdent l'addition et la multiplication, mais que ne possèdent ni la soustraction ni la division. Elle est, là encore, la conséquence directe de la propriété d'associativité des réunions, dans le cas de l'addition. Prenons trois ensembles, que nous appellerons A, B et C. La réunion de A et de B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A mis avec l'ensemble des éléments de B, peut être réunie à l'ensemble C. On obtiendra le même ensemble que si on prenait A et qu'on le reunissait à la réunion de B et de C. En notation formelle,

$$\{A \cup B\} \cup C = A \cup \{B \cup C\}$$

Cela étant, il est évident que si, par exemple, le nombre d'éléments de l'ensemble A est de trois, celui de B de quatre et celui de C de cinq, trois plus quatre ajouté à cinq sera égal à trois ajouté à quatre plus cinq, ce que l'on peut exprimer d'une autre manière en disant que sept plus cinq est égal à trois plus neuf. C'est la propriété d'associativité, propriété importante de l'addition. On peut associer les deux premiers nombres, puis ajouter le résultat au troisième ou ajouter au premier le deuxième et le troisième préalablement associés. Au niveau des ensembles, les éléments se trouveront tous réunis dans l'ensemble-réunion et ils consisteront en la totalité des éléments des ensembles réunis. C'est pourquoi l'opération de réunion des ensembles est associative et il en est de même de l'addition.

On peut faire comprendre la propriété associative en jouant à op-op-op avec « raccourcissement des chaînes ». Nous avons vu plus haut que, par exemple, dans la « chaîne » :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	Troisième état	Opérateur	Quatrième état
3	+2	5	+1	6	+4	10

on pouvait court-circuiter le second état comme suit :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
3	+3	6	+4	10

Arithmétiquement,

$(3 + 2) + 1$ a été remplacé par $3 + (2 + 1)$, soit $3 + 3$

et dans un cas comme dans l'autre on a abouti à 6.

La soustraction ne bénéficie malheureusement pas d'une situation aussi favorisée. En effet, $(7-5)-1$ est égal à $2 - 1$, ce qui fait 1. Ce n'est pas la même chose que $7 - (5 - 1)$, qui équivaut à $7 - 4$, c'est-à-dire à 3, résultat différent de 1 !

$$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1)$$

et la soustraction *n'est pas une opération associative*. On ne peut pas grouper n'importe comment les nombres que l'on soustrait les uns des autres... sous peine d'obtenir des résultats différents. Tandis que $(7 + 5) + 1 = 7 + (5 + 1)$.

Mais si la soustraction n'est pas associative, la succession de deux soustractions équivaut quand même à une seule soustraction. Ainsi :

État initial	Opérateur	État suivant	Opérateur	État final
7	−5	2	−1	1

peut être « raccourci » en

État initial	Opérateur	État final
7	−6	1

de sorte que

$$(7 - 5) - 1 = 7 - (5 + 1) = 7 - 6 = 1$$

tandis que

$$(7 - 5) - 1 \neq 7 - (5 - 1).$$

Les propriétés des inverses peuvent aussi être considérées dans l'optique « op-op-op ». Jusqu'à présent, on a parlé d'un opérateur inverse comme d'un opérateur qui, s'il suit le premier opérateur dont il est l'inverse, rétablit l'état initial. Mais on pourrait aussi considérer les propriétés des inverses comme un élément des propriétés des jeux de « raccourcissement de chaînes ». Prenons, par exemple, la chaîne suivante :

État initial	Opérateur	Second état	Opérateur	État final
7	−2	5	+2	7

Comment peut-on faire pour passer de l'état initial à l'état final sans passer par le second état ? Soit en ajoutant, soit en retranchant zéro. On obtient ainsi la chaîne raccourcie:

État initial	Opérateur	État final
7	+0	7

et ainsi $-2 + 2$ est remplacé par $+ 0$,
de même $+ 2 - 2$ peut être remplacé par $+ 0$.

Et l'un comme l'autre peuvent être remplacés par $- 0$.

Arithmétiquement parlant, nous avons exécuté le raccourcissement, ou la « simplification »

de $(7 - 2) + 2$ à $7 + 0$ et enfin à 7

L'application consécutive d'un opérateur et de son inverse est équivalente à l'application de l'élément neutre. Voilà une vue pénétrante dont on pourra aussi favoriser l'acquisition par l'emploi d'autres états et d'autres opérateurs, tels que positions et mouvements dans la classe, allumage et extinction de la lumière, et ainsi de suite. Par exemple, un pas en avant, suivi de son inverse — un pas en arrière — équivaut à « rester sur place », qui constitue, dans ce jeu, l'opération neutre. Appuyer sur le bouton, puis appuyer sur le même bouton (cet opérateur étant son propre inverse) [1] équivaut à « ne pas toucher l'interrupteur », ce qui est encore un opérateur neutre.

Les propriétés des opérateurs ci-dessus sont extrêmement importantes, et il est indispensable de les faire acquérir aux enfants dès qu'ils sont prêts à ce genre de compréhension analytique.

Une autre propriété de l'addition a rapport au zéro. Si, à un nombre quelconque,on ajoute zéro, on obtient un total qui est égal à ce nombre. Par exemple :

$$7+0=7 \qquad 6+0=6 \qquad 0+2=2$$

1. Interrupteur-lumière à télécommande. Ou encore, interrupteur tournant à sens unique de rotation.