ULB

PROBLEMATHS
14 octobre 2019

ÉNONCÉS

Problemath 4

Soient x, y, z des nombres réels non nuls tels que $x+y+z \neq 0$. Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$, pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $n>1$ peut-on en déduire que $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{(x+y+z)^n}$?

Problemath 5

L'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ dont les deux coordonnées sont rationnelles est noté $\mathbb{Q}^2$. La réunion de tous les segments fermés joignant deux points de $\mathbb{Q}^2$ couvre-t-elle le plan $\mathbb{R}^2$?

Problemath 6

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient A, B, C trois cercles de même rayon, tangents deux à deux et situés à l'intérieur d'un cercle Γ auquel A, B, C sont tangents. Par un point quelconque p de Γ, on trace une tangente à A, une tangente à B et une tangente à C, et on désigne les points de tangence par a, b, c. Pour quels points p de Γ l'une des distances $|pa|, |pb|, |pc|$ est-elle la somme des deux autres ?

Les solutions doivent nous parvenir au plus tard le vendredi 1 novembre à 14h.

Solution du Problemath 1 : On ne change rien à la somme cherchée si on adjoint le nombre 0 à la liste et si on écrit chacun des entiers de 0 à 10^n-1 avec exactement n chiffres décimaux, en complétant au besoin leur écriture par des 0 à gauche. Ces entiers forment alors un tableau à 10^n lignes et n colonnes. Le nombre de tels entiers ayant un chiffre donné c en i ème position vaut 10^{n-1} car il y a 10 choix possibles pour chacun des $n-1$ chiffres restants. Il y a donc exactement 10^{n-1} chiffres c dans la i ème colonne du tableau et la somme des chiffres dans cette colonne vaut $(0+1+2+3+\cdots+9)10^{n-1}=45.10^{n-1}$. Comme il y a n colonnes, la somme de tous les chiffres du tableau vaut $45n10^{n-1}$.
Ont fourni une solution correcte : A.BETERMIER (élève de 5ème au Collège St Roch à Ferrières), D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel à Bruxelles), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame de Toutes Aides à Nantes), R.VALICON (BA1 polytech ULB), B.DUBUS, D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN, L.PRIEELS (BA2 polytech ULB), S.LEMAL (BA2 maths ULg), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), C.KIERE (MA1 polytech ULB), E.YUKSEL (MA2 maths Univ Stockholm), M.CORNEZ, T.HAMEL, C.LARIVIERE Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), W.DE DONDER, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.
Solution du Problemath 2 : Comme $|ab|=|ac|, |ap|=|aq|$ et $|bp|=|bq|$, les triangles abp et acq sont isométriques, d'où on déduit que la médiatrice de $[b,c]$ est un axe de symétrie de la figure. Soient $\alpha=\widehat{paq}$ et $\beta=\widehat{bap}$. Dans le triangle paq, $1=7+7-14cos\alpha$, d'où on tire successivement $cos\alpha=\dfrac{13}{14}$ et $sin\alpha=\dfrac{\sqrt{27}}{14}$. Par raison de symétrie, $\alpha+2\beta=60°$, donc $cos2\beta=cos(60°-\alpha)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{13}{14}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{27}}{14}=\dfrac{11}{14}$, d'où $2cos^2\beta=1+cos2\beta=\dfrac{25}{14}$, c'est-à-dire $cos\beta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$. Dans le triangle bap,

$4 = 7 + x^2 - 2x\sqrt{7}cos\beta = 7 + x^2 - 5x$, autrement dit $x^2 - 5x + 3 = 0$. Comme $x > 1$, on a donc $x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Ont fourni une solution correcte : A.BETERMIER (élève de 5ème au Collège St Roch à Ferrières), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au lycée Notre Dame à Nantes), J.AYMANE (élève de classes préparatoires aux Grandes Ecoles à Tanger), C.PANIDIS (BA1 maths ULB), S.LEMAL (BA2 maths Ulg), M.CZUPRYNKO, D.H.NGUYEN, K.D.NGUYEN, L.PRIEELS (BA2 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths Ulg), C.KIERE (MA1 polytech ULB), E.YUKSEL (MA2 maths Univ Stockholm), M.CORNEZ, O.DECKERS, P.GILLET, T.HAMEL, C.LARIVIERE, S.MASSON, Y SUPRIN, C.VAN HOOSTE, H.VERMEIREN (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), J.M.BAYLAC, W.DE DONDER, A.GRUWE, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES, G.MUKENDI (ingénieurs), F.THONAR (actuaire), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe) et LADY BELMATH.

Solution du Problemath 3 : Désignons par p_n la probabilité qu'Alice gagne le jeu si elle a n pièces de 1 euro en main. Comme il y a une change sur deux qu'elle gagne (ou perde) 1 euro après le prochain lancer de la pièce, on a $p_n = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_{n-1}$ pour tout $n > 0$ (avec bien sûr $p_0 = 0$). Donc $p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1} = 0$, d'où on tire successivement $p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1} = p_{n-1} - p_{n-2} = \cdots = p_2 - p_1 = p_1$. Par conséquent, $p_n = np_1$ pour tout $n > 0$ et, comme $p_{a+b} = 1$, $p_1 = \frac{1}{a+b}$. La probabilité qu'Alice gagne vaut donc $p_a = \frac{a}{a+b}$.

Ont fourni une solution correcte : D.CORTILD (élève de 6ème au Collège St Michel à Bruxelles), R.MAKHLOUF (élève de 6ème au Collège Don Bosco), Y.DILLIES (élève de Terminale au Lycée Notre Dame à Nantes), S.LEMAL (BA2 maths Ulg), B.DUBUS, K.D.NGUYEN (BA2 polytech ULB), R.HAYA ENRIQUEZ (BA3 maths UCL), S.KRECZMAN (BA3 maths ULg), C.KIERE (MA1 polytech ULB), T.HAMEL, Y.SUPRIN, C.VAN HOOSTE (profs de maths), L.GALANT (prof d'informatique), J.M.BAYLAC, W.DE DONDER, E.GRUWE, M.LESSINNES, T.LESSINNES (ingénieurs), F.THONAR (actuaire), M.NIZETTE (Risk Officer bancaire), P.MASAI (vice-président de Toyota Motor Europe).

ILS SE CACHENT. RETROUVEZ-LES

Les noms de 27 mathématicien(ne)s célèbres sont cachés dans le texte ci-dessous. De qui s'agit-il ? Réponse dans le prochain envoi de Problemaths. Bon amusement !

"Le fond de l'air était glacial et Martine, qui travaillait à quart-temps, ne portait qu'un léger châle. Elle tomba malade et on lui recommanda Lambert pour ses diagnostics médicaux. Chirurgien réputé, il était bien bâti, tsigane d'ascendance, adorant les calembours, guindailleur, mais malgré tout ringuard, avec une longue barbe et un nez percé. Il lui dit: "Ton coeur palpite, ta gorge est enflée, je vais te faire ma potion magique, avec une courte prescription de deux lignes". Un petit chien aboya. "Va chercher ta laisse!" lui ordonna-t-il. "Je te présente Mirza, caniche très affectueux, abandonné par des gueux de la campagne. Maintenant, je vais t'enlever cette petite boule suspecte. On serre les coudes et on se tait lors d'une telle intervention. Qu'on ne me dérange pas!" Scalpel à la main, il opérait en se gaussant. "Je veux bien qu'on rie, ma non troppo". Elle craignait qu'il ne termine trop tard. Quand ce fut fini, elle sortit de l'hôpital et descendit quelques marches. Immédiatement, elle se sentit beaucoup mieux".