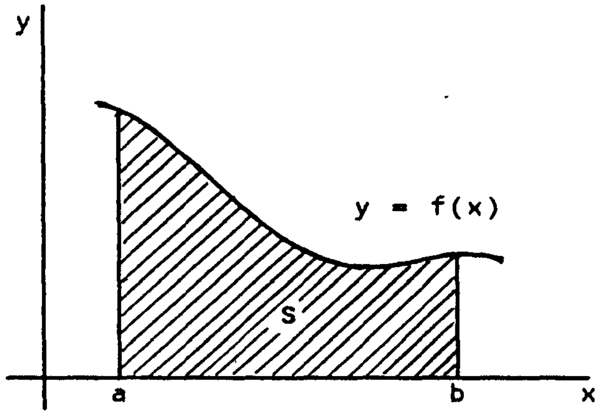
10
Applications du calcul integral au calcul d'aires, de volumes...

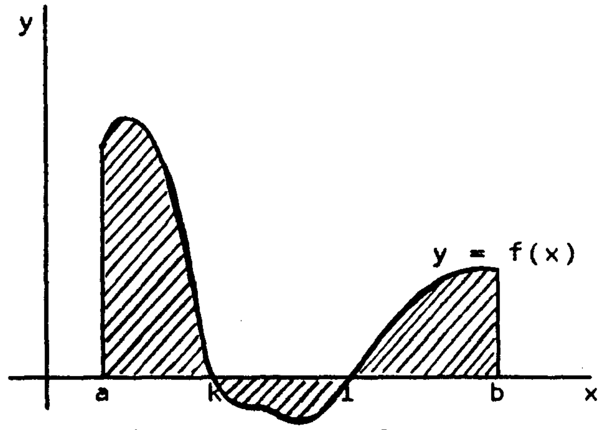
APPLICATION DU CALCUL INTEGRAL AU CALCUL D' AIRES, DE VOLUMES ...

Rappels :

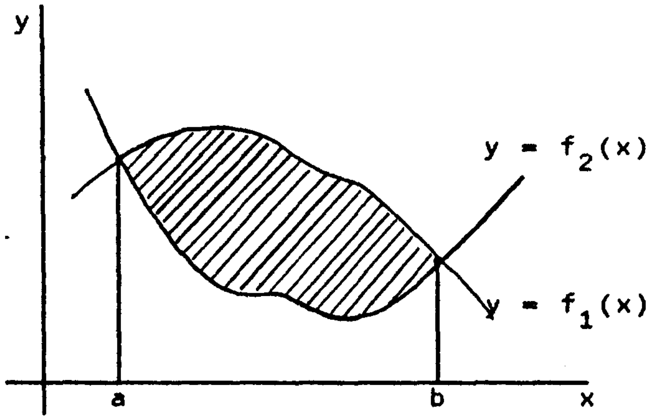
f(x) est une fonction réelle continue de primitive F(x).

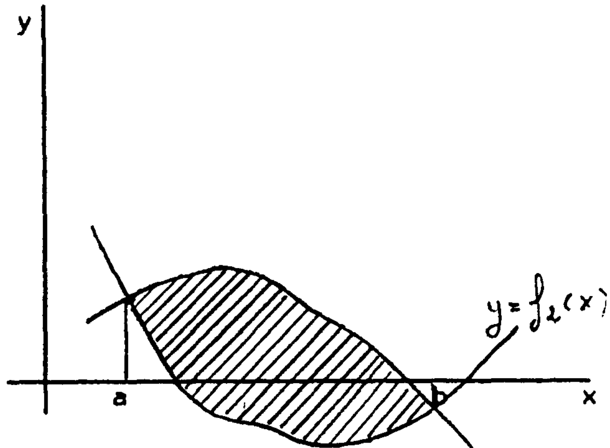


$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



$$S = \int_a^k f(x)\,dx - \int_k^l f(x)\,dx + \int_l^b f(x)\,dx$$





$$S = \int_a^b (\ f_1(x) - f_2(x)\ )\,dx$$

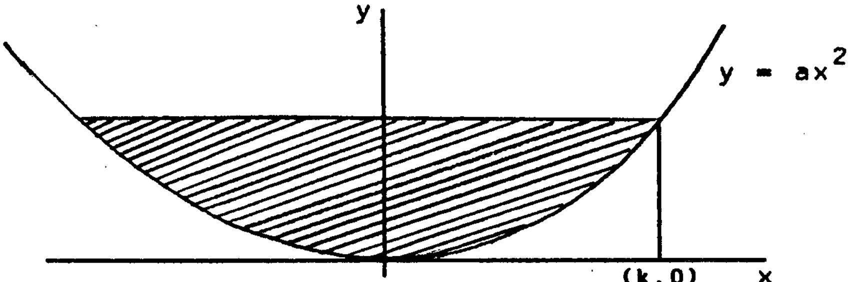
y = f1(x)

Remarques :

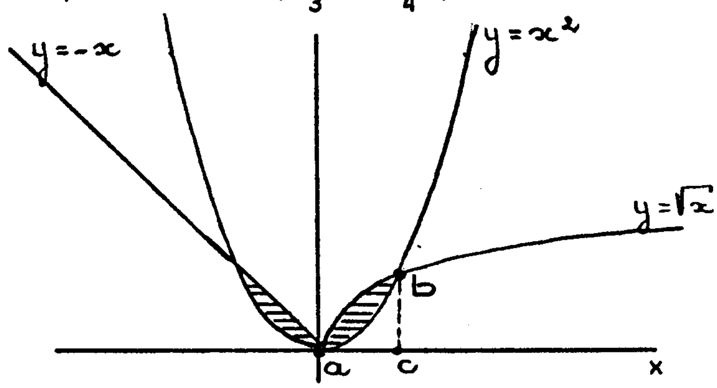
1. Il est avantageux de tirer parti de la symétrie des figures.
2. Quand on effectue un changement de variable, il est souvent plus facile de changer la valeur des bornes que de retourner aux anciennes variables une fois l' intégration faite.

Exercices :

1. Aire comprise entre les courbes $y = \sin^2 x$ et $y = \cos^2 x$ sur le segment $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.
   réponse : 1
2. Aire comprise entre la boucle de la sinusoïde ($0 \leq x \leq \pi$) et la parabole passant par les points $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},1)$ et $(\pi,0)$.
   réponse : $\frac{2}{3}\pi - 2$
3. Calculer l' aire hachurée



   réponse : $\frac{4}{3}.a.k^3$
4. Calculer l' aire comprise entre les paraboles
$$y = -x^2 + 6x \text{ et } y = x^2 - 8x + 20$$
   réponse : 9
5. Calculer l' aire comprise entre les courbes d' équation
   a) $x^2 + y^2 = 4$ et $y^2 = 3x$ réponse : $\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$
   b) $y = 2 - x^2$ et $y^3 = x^2$ réponse : $\frac{32}{15}$
   c) $y^2 = 4x$ et $y = 2x - 4$ réponse : 9
6. Déterminer l' aire du segment de cercle limité par une corde située à la distance $\frac{r}{2}$ du centre du cercle, en fonction du rayon r de ce cercle.
   réponse : $r^2.(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$
7.



Démontrer que l' aire hachurée est égale à l' aire du triangle abc.

8. Déterminer l'aire délimitée par les courbes $y = 0$, $x = 2\pi$, $x = 0$ et $y = \sin 2x + 2.\cos x$
réponse : 8

9. Donner l' allure du graphique de $y = x.e^{-x}$ ($x \geq 0$). Déterminer l' aire de la surface du premier quadrant délimitée par la courbe précédente et par la parallèle à OY passant par le point d' inflexion de cette courbe.
réponse : $1 - \frac{3}{e^2}$

10. Déterminer l' aire extérieure à $y = -2x^2 + 2$ et intérieure à $x^2 + y^2 = 4$ Réponse $\cong 5.48$

11. On donne la courbe P d' équation $y^2 = 2px$. Aux points a, b d' abscisse k de P, on trace les tangentes à P qui se coupent en un point c. Démontrer que l' aire de la surface située entre P et la droite d' équation $x = k$ vaut les $\frac{2}{3}$ de l' aire du triangle abc.

12. Quelle est la mesure de l' aire délimitée par les courbes

a) $y = x - 1$ et $y = -x^3 + x^2 + x - 1$

Réponse : $\frac{1}{12}$

b) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = -\pi$, $x = \pi$
Réponse : $4.\sqrt{2}$

13. Chercher l' aire commune, " à l' intérieur " des paraboles

$y = x^2 - 2$ et $x = \frac{2}{3}.y^2 - \frac{y}{3}$
Réponse : $\frac{19}{6}$

14. Chercher l' aire de la surface délimitée par les courbes :

$y = \frac{4}{3}.x + 2$, $x = 3$, $x = 4$ et $y = \frac{4}{3}.x + 2 + \ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right|$
Réponse $\cong 1.32$

15. Chercher l' aire de la surface délimitée par les courbes :

$y = 0$, $x = 1$, $y = e^x.(x^2 - 1)$ et $x = M$ où M est l' abscisse du maximum de la courbe précitée.

Réponse : $\frac{8}{e} - \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{e^{1 + \sqrt{2}}}$

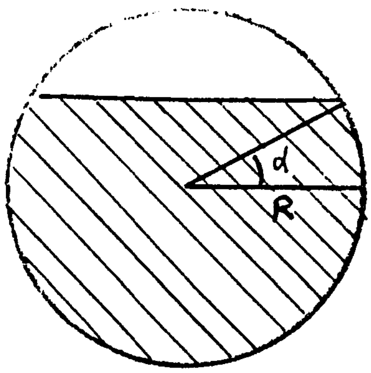
16. Chercher l' aire de la surface délimitée par les courbes :
$x = 0$, $x = 3.\pi$, $y = 0$ et $y = x + \sin x$.
Réponse : $\frac{9\pi^2}{2} + 2$

17. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\, dx$

Réponse : $\ln \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

18. On donne une ellipse de centre o et de demi-axes 2b et b ainsi qu' un cercle de centre c(b,o) et de rayon b. Quelle est l' aire comprise entre ces deux courbes ?

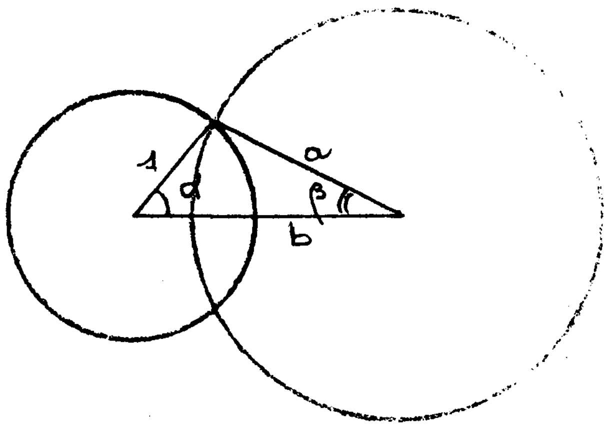
Réponse : $b^2.[-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\arcsin(+\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}.\sqrt{2}\,]$

19. 

Que vaut la surface hachurée en fonction de R et de α ?

Réponse :
$\frac{R^2}{2} .(\pi + \sin 2\alpha + 2\alpha\,)$

20. On donne deux cercles de rayons respectifs 1 et a ($a > 1$).
La distance entre les centres des deux cercles vaut b ($a - 1 \leq b \leq a + 1$).
Calculer l' aire commune aux deux cercles.



Réponse : $\alpha + a^2.\beta - b.\sin\alpha$

21. On donne une ellipse de centre O et de demi-axes a et b. A est un sommet sur le grand axe. On considère l' aire S du secteur elliptique AOP limité par un arc AP de l' ellipse et une droite OP formant un angle μ avec OA.

a) Exprimer cette aire en fonction de a, b, μ

Réponse : $a.b.\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\sin 2\mu}{4}\right)$

b) Vérifier votre résultat sur des cas particuliers connus ou évidents.

Réponse : $\mu = 0$, $S = 0$

$\mu = \frac{\pi}{2}$, $S = \frac{\pi ab}{4}$

22. On donne les deux courbes ayant respectivement les équations

$$y_1 = e^{-x} \text{ et } y_2 = \frac{1}{2}.(e^{x} - e^{-x})$$

dans des axes cartésiens (X,Y). On demande :

a) l' aire de la surface comprise entre l' axe OY et les deux courbes dans la portion du plan où $y_1 \geq y_2$ et $x > 0$.

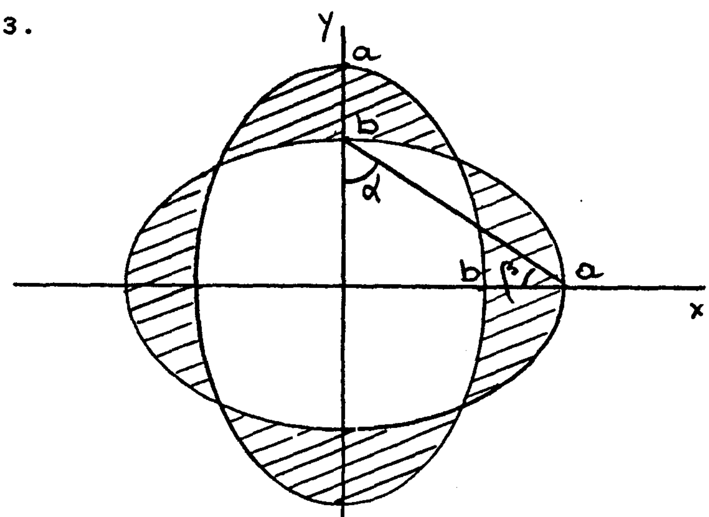
Réponse : $2 - \sqrt{3}$

b) l' aire de la surface comprise entre les deux courbes et l' axe OX pour $x > 0$.

Définition : $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (si cette limite existe !)

Réponse : $\sqrt{3} - 1$

23.



Calculer l' aire hachurée, située " entre " les deux ellipses représentées.

Réponse $= 2b(4\alpha - \pi) = 2b(\pi - 4\beta)$

24. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n . \sqrt{1 - x} \; .dx$$

a) $I_0 = ?$ Réponse : $\frac{2}{3}$

b) $I_1 = ?$ Réponse : $\frac{4}{15}$

c) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire les valeurs de I_2 et de I_3.

Réponse : $I_n = \frac{2n \; I_{n-1}}{2n + 3}$

$$I_2 = \frac{16}{105} \; , \; I_3 = \frac{32}{315}$$

25. On considère la courbe d' équation

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$$

a) Calculer S_α, l' aire entre la courbe, l' axe X et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$.

Réponse : $\frac{2}{3}.\sqrt{1 + \alpha} \; .(\alpha - 2) + \frac{4}{3}$

b) Calculer S_β, l' aire entre la courbe, l' axe X et les droites $x = 0$ et $x = \beta$ où $-1 < \beta < 0$.

Réponse : $\frac{2}{3}.\sqrt{1 + \beta} \; .(\beta - 2) + \frac{4}{3}$

c) Calculer la limite de S_β si β tend vers -1.

Réponse : $\frac{4}{3}$

26. On considère la suite de nombres S_n définie par

$$S_n = \int_n^{n+1} e^{-ax}.\sin^2 \pi x.dx \qquad \text{où } a \in R_0^+, \; n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer S_0

Réponse : $\frac{2\pi^{\text{[illegible]}}}{\text{[illegible]}}.\left(\frac{1 - e^{-a}}{a^2 + 4\pi^2} \right)$

b) Sans calculer explicitement l' intégrale, démontrer que $\{ S_n \}$ constitue une suite géométrique de raison e^{-a}.

Indication : Chercher une substitution $u = x - \lambda$ avec λ judicieusement choisi.

c) En déduire la somme de la progression

$$I_n = S_0 + S_1 + \ldots + S_n \quad \text{et} \quad I = \lim_{n \to \infty} I_n$$

Réponse : $I_n = S_0 . \dfrac{1 - e^{-an}}{1 - e^{-a}}$, $I = \dfrac{2\pi}{(a^2 + 4\pi^2)}$

d) Indiquer sur un graphique approximatif, l' aire correspondant à I.

27. Dans des axes cartésiens orthogonaux, on considère la parabole $y^2 = 2px$. Par son foyer $f(\frac{p}{2},0)$ on mène une droite formant un angle α avec l' axe de la parabole.

a) Représenter graphiquement les éléments du problème (croquis rapide).

b) Déterminer en fonction de (p,α) les coordonnées des intersections entre la droite et la parabole.

Réponse : $x = \dfrac{p(tg^2\alpha + 2)}{2tg^2\alpha} \pm \dfrac{p}{\cos\alpha . tg^2\alpha}$, $y = \dfrac{p}{\sin\alpha}.(\cos\alpha \pm 1)$

c) Déterminer en fonction de (p,α) l' aire comprise entre la parabole et la droite.

Réponse : $\dfrac{2p^2}{3.\sin^3\alpha}$

28. Dans des axes cartésiens X,Y d' origine o, on considère, sur l' intervalle $(0,\pi)$ la fonction

$$y = \sin^2 x$$

et son graphe Γ.

Soit $p(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, le point de contact de la tangente τ, menée de o à Γ.

a) Représenter graphiquement (croquis rapide) Γ et τ.

b) Démontrer que l' abscisse $\bar{x}$ doit satisfaire à la relation

$$tg\,\bar{x} = 2.\bar{x}$$

c) Calculer la surface comprise entre la tangente op et Γ en fonction de $\bar{x}$.

Réponse : $\frac{1}{4}.(2.\bar{x}.\sin^2\bar{x} - 2.\bar{x} + \sin 2\bar{x})$

29. On considère l' intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} t^n \sin t \, dt \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer I_0 et I_1

Réponse : $I_0 = 2$, $I_1 = \pi$

b) Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

Réponse : $I_n = \pi^n - n.(n-1).I_{n-2}$

c) A partir de la relation précédente, déterminer explicitement I_n sous forme d' une somme d' un nombre fini de termes.

(On fera la distinction entre n pair et n impair)

Réponse : $I_n = \pi^n - n(n-1)\pi^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)\pi^{n-4} - \ldots + K$

si n est pair, $K = \pm n!2$: + si $n = 2n'$ avec n' pair
− si $n = 2n'$ avec n' impair

si n est impair, $K = \pm n!\pi$: + si $n = 2n'$ avec n' pair
− si $n = 2n'$ avec n' impair

30. Dans des axes cartésiens orthogonaux on considère les deux circonférences Γ_1 : rayon R, passant par l' origine, tangente à l' axe X.

Γ_2 : rayon 2R, centre (0,−R)

a) Représenter ces deux circonférences par un dessin

b) Déterminer leur aire commune

Réponse ≅ $0.10 \, R^2$

31. Dans des axes orthogonaux (X,Y) on considère la courbe d' équation

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{et l' intégrale} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx$$

a) Dessiner (croquis rapide) la courbe et l' aire représentée par cette intégrale dans un plan (X,Y).

b) Calculer cette aire

Réponse ≅ 0.546

c) Evaluer l' aire déterminée par l' axe X et l' arc de la courbe située dans le demi-plan $y < 0$.

Réponse ≅ 1.142 $(\pi - 2)$

32. Dans des axes cartésiens orthogonaux (X,Y) on considère les deux courbes d' équation :

$$y_1 = \cos^2 x \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{8}{3}.\sin x \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

a) Représenter ces deux courbes graphiquement dans (X,Y) (croquis rapide)

b) Déterminer l' aire de la surface comprise entre ces deux courbes et l' axe X.

Réponse ≅ 1.22

CALCUL DE SURFACES DONT LE GRAPHIQUE EST DONNE PAR DES EQUATIONS PARAMETRIQUES OU EN COORDONNEES POLAIRES

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, f'(t)\, dt$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{ et } r = f(\theta) \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

Exercices :

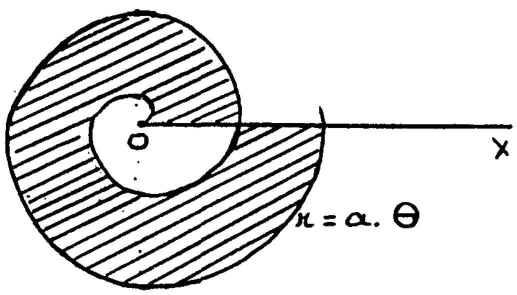
1. Calculer l' aire sous l' arche d' une cycloïde

   Réponse : $3\pi r^2$

2. Calculer l' aire d' un secteur de la spirale logarithmique $r = a.e^{\theta}$ où $a \in \mathbb{R}_0^+$

   Réponse : $\dfrac{r_2^2 - r_1^2}{4}$

3. Calculer l' aire hachurée



   Réponse : $8.a^2.\pi^3$

4. Calculer l' aire intérieure aux courbes

   a) $r = \sin 3\theta$

   Réponse : $\dfrac{\pi}{4}$

   b) $r = \sin 2\theta$

   Réponse : $\dfrac{\pi}{2}$

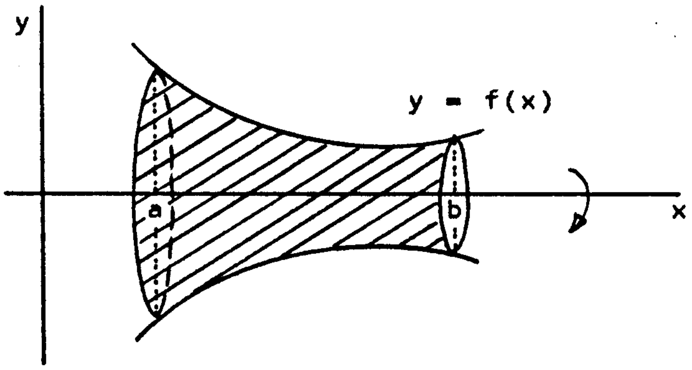
   c) $r^2 = 2.a^2.\cos 2\theta$

   Réponse : $2a^2$

   d) $r = a.\cos^2\theta$

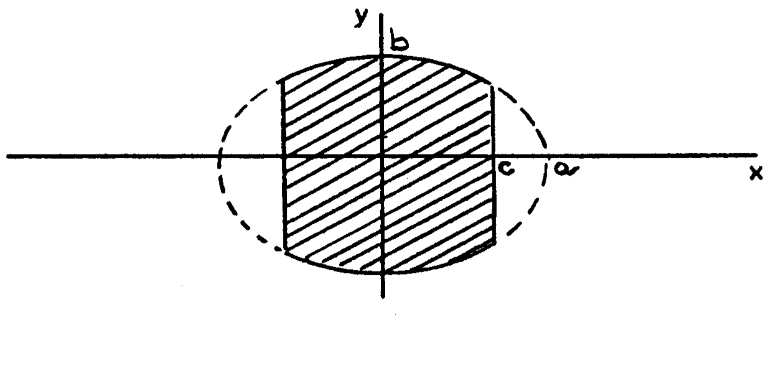
   Réponse : $\dfrac{3}{8}\pi a^2$

VOLUME D' UN SOLIDE DE REVOLUTION



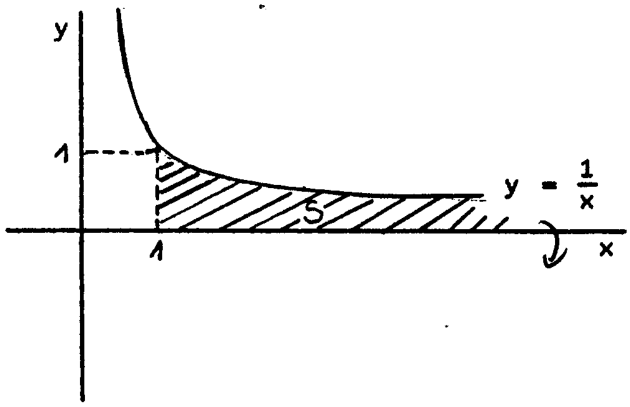
$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2\, dx$$

1. Déterminer le volume d' un cône dont la base est un cercle de rayon r et dont la hauteur vaut h.
   Réponse : $\frac{1}{3}.\pi.r^2.h$
2. Déterminer le volume d' une sphère de rayon r.
   Réponse : $\frac{4}{3}.\pi.r^3$
3. Déterminer le volume d' une section droite (faite à une distance h du sommet) d' un paraboloïde de révolution engendré par la parabole $y^2 = 2px$.
   Réponse : $\pi.p.h^2$
4. Déterminer le volume d' un ellipsoïde de révolution engendré par une ellipse dont les longueurs des axes valent 2a et 2b, l' ellipsoïde étant obtenu par la rotation de l' ellipse autour de l' axe de longueur 2a.
   Réponse : $\frac{4}{3}\pi ab^2$
5. Si on considère qu' un tonneau est obtenu par la rotation d' une ellipse sectionnée par deux droites parallèles à un axe, quel est le volume du tonneau.



réponse :
$2\pi b^2(c - \frac{c^3}{3a^2})$

6. Paradoxe :



Calculer

$$S = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

$$V = \pi . \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

7. Que vaut le volume engendré par la rotation autour de l' axe OX de la surface délimitée par P : $y^2 = x$, D : $2x - 3y - 2 = 0$ et l' axe OX ?

   Réponse : 4π

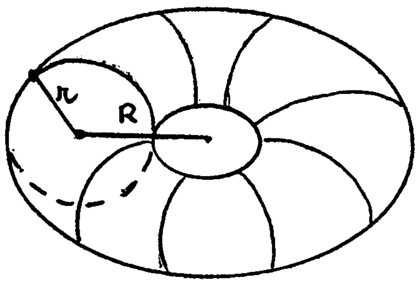
8. Que vaut le volume du solide engendré par la rotation autour de l' axe OX d' une arcade de cycloïde ?

   Réponse : $5\pi^2 r^3$

9. Que vaut le volume engendré par la révolution de la région délimitée par l' axe OX et une arcade de cycloïde autour de l' axe de symétrie de cette cycloïde ?

   Réponse : $\pi r^3 (\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3})$

10. Que vaut le volume d' un tore ?



   Réponse : $2\pi^2 R r^2$

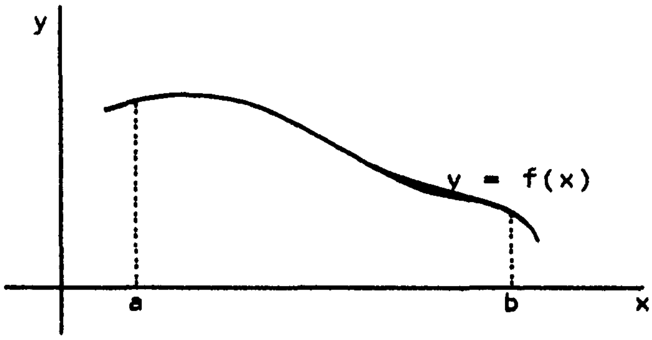
11. Esquisser la cissoïde $y^2(a - x) = x^3$ où $a \in \mathbb{R}_0^+$

   Déterminer le volume du solide engendré par la rotation autour de l' axe OX de la région comprise entre la cissoïde et la droite $x = \frac{a}{2}$

   Réponse : $\pi a^3 (\ln 2 - \frac{2}{3})$

CALCUL DE LA LONGUEUR D' UN ARC DE COURBE

1. f(x) est une fonction réelle dérivable sur [a,b]



$$l = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

2. $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

3. $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$ $r = f(\theta)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

Exercices :

1. Calculer la longueur d' un cercle de rayon r

   Réponse : $2\pi r$

2. Calculer la longueur d' une arche d' une cycloïde

   Réponse : 8r

3. Calculer la longueur de la cardioïde : $r = a.(1 + \cos\theta)$

   Réponse : 8a

4. Calculer la longueur de la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$ entre le droites $x = 0$ et $x = 5$

   Réponse : $\frac{335}{27}$

5. Calculer la longueur de l' astroïde : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

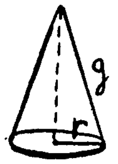
   Réponse : 6a

6. Calculer la longueur de la courbe $r = \sin^3 \frac{\theta}{3}$

   Réponse : $\frac{3\pi}{2}$

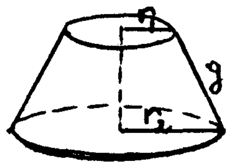
AIRE LATERALE D' UNE SURFACE DE REVOLUTION

Aire latérale d' un cône :



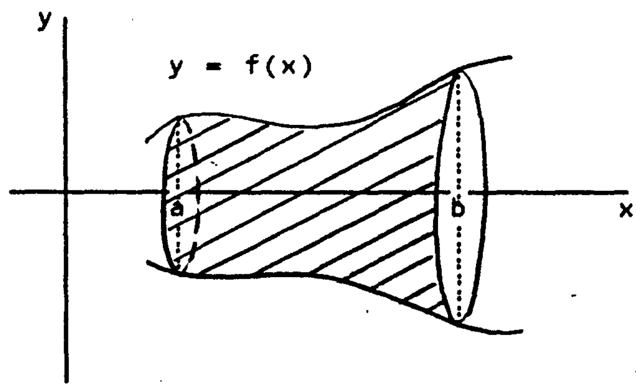
$$S = \pi . r . g$$

Aire latérale d' un tronc de cône :



$$S = \pi . g . (r_1 + r_2)$$

Aire latérale d' une surface de révolution :



$$S = 2\pi . \int_a^b y . \sqrt{1 + y'^2} . dx$$

Exercice : Que vaut la surface d' une sphère de rayon r ?
Réponse : $4\pi r^2$

Théorèmes de Guldin :

Le **volume** d' un corps engendré par la révolution d' une figure plane autour d' un axe quelconque situé dans son plan et ne le traversant pas est égal au produit de l' **aire** de la figure génératrice par la longueur du chemin décrit par son centre de gravité durant la révolution.

L' **aire** d' un corps engendré par la révolution d' une figure plane autour d' un axe quelconque situé dans son plan et ne le traversant pas est égal au produit de la **longueur** de la figure génératrice par la longueur du chemin décrit par son centre de gravité durant la révolution.

Exercice : Trouver le volume et la surface d' un tore.

Et pour finir ce chapitre, que vaut donc la longueur d' une ellipse ?