Les groupes sporadiques

par Francis Buekenhout

Francis Buekenhout est professeur de mathématiques à l'Université Libre de Bruxelles.

■ Il existe une infinité de groupes — ces objets mathématiques maintenant banalisés dans l'enseignement primaire. Depuis la génèse de leur théorie, les mathématiciens cherchent à les classer pour en faciliter l'étude. Le but de cette classification est non seulement de rassembler les groupes qui ont des propriétés communes mais aussi de prédire le nombre et les propriétés de ceux qui restent à découvrir. La famille qui a été la plus rebelle à constituer est celle des groupes dits simples finis. Il a fallu attendre 1980 pour que le dernier, «le Monstre», qui avait résisté aux coups des plus puissants ordinateurs, cède aux efforts de R. Griess. Il a été ainsi baptisé car il possède 10^{53} éléments. Avec lui s'achève la classification des groupes simples finis. Cette œuvre qui a mobilisé des générations d'illustres mathématiciens conclut à l'existence de dix-sept familles infinies et vingt-six groupes isolés ou sporadiques. «Le Monstre» était le vingt-sixième. Son histoire constitue un chapitre important et original de la recherche actuelle en mathématiques.

■ Au début de 1980, les principaux experts de la théorie des groupes simples finis reçurent des vœux de Nouvel An pour le moins originaux, en provenance de R. Griess, professeur à l'université du Michigan, alors en visite à Princeton (fig. 2). R. Griess annonçait la construction d'un groupe simple constitué — oh ironie des termes ! — de : 808017424 794512875886459904961715700575436800 00000000 éléments. L'existence de ce groupe avait été prédite en 1973 par B. Fischer, professeur à Bielefeld, et par R. Griess lui-même. Le malicieux J.H. Conway s'était empressé de trouver un nom à cet objet encombrant : le Monstre ! Celui-ci allait rapidement se trouver au centre des préoccupations de nombreux spécialistes tout en demeurant hors d'atteinte des efforts de construction y compris ceux réunissant les efforts combinés d'ordinateurs parmi les plus puissants et de savants tels que C. Sims (Rutgers, New-Jersey) qui avaient réussi à construire par ce moyen d'autres groupes, notamment le Bébé Monstre dont la taille (nous dirons dorénavant l'*ordre*) atteint 10^{33} éléments.

Le message de R. Griess déclencha la curiosité générale et de nombreuses demandes d'explications auxquelles l'intéressé opposa une fin de non-recevoir. Il souhaitait vérifier tous les détails de son travail avant d'en révéler quoi que ce soit, mais son attitude provoqua des commentaires variés dont la presse se fit même l'écho. Début avril, R. Griess fit, à quelques jours d'intervalle, trois conférences à Princeton, Chicago et Ann Arbor, où il révéla enfin sa méthode. Le principe en est simple : le Monstre apparaît comme un groupe de rotations d'un espace de dimension 196 883 et il est engendré à partir de deux sous-groupes. Dans son édition du 22 juin 1980, le *New-York Times* consacrait une demi-page à l'existence du Monstre. On peut se demander en quoi cet événement peut intéresser le grand public.

Les groupes et l'homme de la rue.

Mais revenons aux origines de tout cela : qu'est-ce qu'un groupe ? (fig. 1) A quoi sert-il ? Pourquoi la communauté des mathématiciens s'acharne-t-elle sur ces objets ? Quelles perspectives leurs travaux ouvrent-ils ? Voilà les questions que nous allons tenter d'élucider dans cet article.

Un groupe est un ensemble G muni d'une opération (ou loi de composition interne) notée multiplicativement et telle que :

1) Pour toute donnée d'éléments a et b de G, le produit ab de ces éléments est un élément de G ;

2) Pour toute donnée d'éléments a, b et c de G, on a : (ab)c = a(bc) ;

3) Il existe dans G un élément noté i (et parfois 1) tel que, pour tout élément a de G, on ait : ai = ia = a ;

4) Pour tout élément a de G, il existe un élément a^{-1} de G, tel que : $a^{-1}a = aa^{-1} = i$. De plus, le groupe G sera dit commutatif si tous ses éléments vérifient l'égalité ab = ba.

Cette notion de groupe est une abstraction que l'on peut illustrer très élémentairement par le jeu de «pair ou impair ?» de notre enfance. Deux enfants prennent chacun dans une main un tas de billes. Il s'agit de savoir si les billes contenues dans ces deux mains sont en nombre pair ou impair. Plutôt que d'additionner le nombre de billes de chacune des mains, pour en connaître la parité, il est plus simple d'en additionner les parités. Ainsi si l'un des enfants a un nombre pair de billes et l'autre un nombre impair, le nombre total de billes sera impair et si les deux ont un nombre pair ou impair de billes, le résultat sera pair. Cette loi de composition des parités est une loi de groupe, le groupe est noté S_2 et comme il contient deux éléments, il est dit d'ordre 2.

Un autre exemple de groupe est fourni par les déplacements dans le plan ou dans l'espace, d'un objet solide. Celui-ci peut subir une infinité de rotations et de glissements (translations) qui tous lui conservent sa forme. Il est clair que la combinaison de deux déplacements de ce solide est aussi un déplacement de ce solide. Et en notant i l'absence de déplacement, ou plutôt le déplacement identité, nous pouvons facilement constater que l'ensemble des déplacements du solide obéit à une loi de groupe. Ce groupe, qui admet une infinité d'éléments, est dit d'ordre infini. C'est le groupe des déplacements de la géométrie euclidienne, dans le plan ou dans l'espace, ou encore le groupe des symétries d'un objet solide.

On peut même définir un groupe à partir d'un ensemble quelconque E. On considère l'ensemble S_E des transformations biunivoques (ou applications bijectives) qui transforment E en lui-même et qui sont réversibles. S_E a une structure de groupe pour la loi de composition des transformations notée o, et on l'appelle le groupe symétrique de E. Tout sous-groupe de S_E est appelé groupe de transformations de E. Ces groupes ont un rôle déterminant en géométrie ; en voici un exemple.

Soit E le triangle équilatéral de sommets (A, B, C). Les transformations qui ne modifient pas la forme du triangle E sont au nombre de six et toute composition de deux d'entre elles aboutit à une troisième. A partir de ces données, on peut établir la table de multiplication de S_E (fig. 3). Ainsi avec un ensemble de trois éléments au départ, nous avons construit son groupe symétrique S_3 (car nous noterons ainsi S_E dans ce cas). Sur le même principe on peut construire pour tout ensemble fini E de n éléments son groupe symétrique S_n.

Les quelques exemples qui précèdent soulignent l'importance de la théorie des groupes en mathématiques, et plus généralement en sciences, voire dans la vie quotidienne. J. Tits, titulaire de la chaire de théorie des groupes au Collège de France, faisait remarquer à juste titre, dans sa leçon inaugurale de 1975 «... et les parents de notre écolier, s'ils ne se contentent pas de lever les bras au ciel, découvrent qu'ils faisaient depuis toujours de la théorie de groupes comme M. Jourdain faisait de la prose». Plus loin, il explique ce qu'est cette «théorie résultant du développement mathématique des idées voisines d'*homogénéité*, de *symétrie* et d'*indiscernabilité* ou, en termes plus philosophiques, de la synthèse du même et du différent».

Si chacun est exposé à l'emploi des rudiments de la théorie qui s'est surtout développée à partir de 1830 environ, sous l'impulsion d'Evariste Galois, les applications les plus sophistiquées se rencontrent aujourd'hui en spectroscopie, cristallographie, physique des particules, mécanique quantique, géométrie, topologie et théorie des nombres. Un apport majeur des groupes est de fournir un outil de classification dans des domaines par ailleurs très complexes. Il en fut ainsi dès l'époque de Galois qui voyait dans les groupes un principe classificateur des

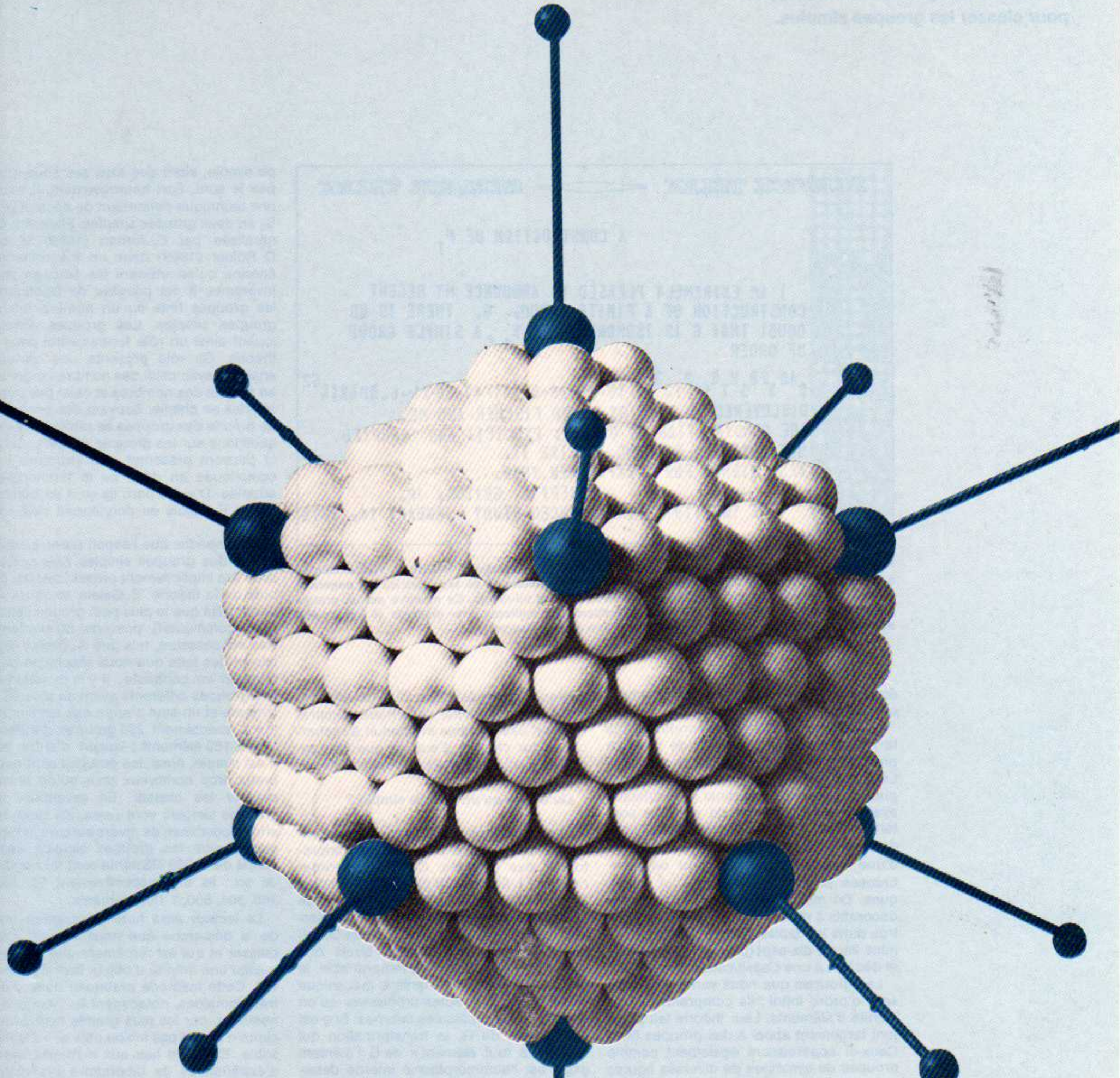

Figure 1. **Les groupes sont des objets mathématiques introduits au XIX^e siècle que les lycéens de nos jours manipulent avec autant d'aisance que les nombres. De fait, les groupes ne sont pas aussi abstraits que leur définition. Certains nous sont même familiers : les groupes des symétries du cube, de l'icosaèdre par exemple que l'on retrouve dans d'autres polyèdres et dans certains virus. Il s'agit ici de l'adénovirus reponsable des infections de la gorge (chaque boule blanche représente une protéine capsidaire).** (Droits réservés)